

INTERROGATION 2

Physique 3.

Groupe

Nom:.....

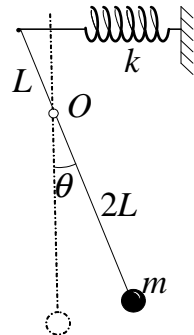
Prénom:.....

Questions

Le système ci-contre peut tourner librement autour du point O . ($\theta \ll 1$.)

La boule est supposée ponctuelle et la tige sans masse. ($\sin \theta \approx \theta$. $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$.)

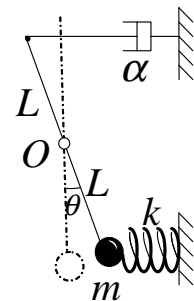
1. Trouver l'énergie cinétique T , l'énergie potentielle U , et l'énergie totale E .
2. Trouver l'équation du mouvement à l'aide de l'équation de conservation.
3. Trouver la pulsation propre ω_0 sachant que $m=1\text{kg}$, $L=1\text{m}$, $k=4\text{N/m}$, $g=10\text{m/s}^2$.



Le système précédent est modifié comme le montre la figure ci-contre.

Le système est soumis à présent à un frottement de coefficient α . ($\theta \ll 1$.)

1. Trouver l'énergie cinétique T , l'énergie potentielle U , et le Lagrangien \mathcal{L} .
2. Trouver la fonction de dissipation \mathcal{D} puis l'équation du mouvement à l'aide de \mathcal{L} .
3. Trouver la nature du mouvement sachant que $\alpha=8\text{N.s/m}$.
4. Trouver le temps τ au bout duquel l'amplitude est divisée par 3 si $\alpha=1\text{N.s/m}$.



Réponses

1. $T = \frac{1}{2}m(2L\dot{\theta})^2 = 2mL^2\dot{\theta}^2$. (0.25)
 $U = U_{\text{ressort}} + U_m \approx \frac{1}{2}k(L \sin \theta)^2 + mg(2L - 2L \cos \theta)$ (0.25) $\approx \frac{1}{2}k(L\theta)^2 + mgL\theta^2$. (0.25)
 $E = T + U = 2mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(kL^2 + 2mgL)\theta^2$. (0.25)
2. L'équation de conservation $\frac{dE}{dt} = 0$ (0.25) nous donne $4mL^2\ddot{\theta} + (kL^2 + 2mgL)\theta\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{kL+2mg}{4mL}\dot{\theta} = 0$. (0.5)
3. La pulsation propre est donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{kL+2mg}{4mL}}$ (0.25). A.N: $\omega_0 = \sqrt{6}\text{rad/s}$. (2)
1. $T = \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$. (0.25)
 $U = U_{\text{ressort}} + U_m \approx \frac{1}{2}k(L \sin \theta)^2 + mg(L - L \cos \theta)$ (0.25) $\approx \frac{1}{2}k(L\theta)^2 + \frac{1}{2}mgL\theta^2$. (0.25)
 $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(kL^2 + mgL)\theta^2$ (0.25)
2. $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha v^2 = \frac{1}{2}\alpha(L\dot{\theta})^2$ (0.25). L'équation du mouvement est $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{kL+mg}{mL}\theta = 0$. (0.5)
3. La nature du mouvement est donnée par le signe de $\lambda^2 - \omega_0^2$. (0.25)
 $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ (0.5), $\omega_0 = \sqrt{\frac{kL+mg}{mL}}$ (0.5). A.N: $\lambda^2 - \omega_0^2 = 16 - 14 > 0$. (0.5) \Rightarrow Le mouvement est apériodique. (0.5)
4. Le temps nécessaire est τ tel que $Ae^{-\lambda(t+\tau)} = \frac{1}{3}Ae^{-\lambda t} \Rightarrow \tau = \frac{\ln 3}{\lambda}$. (0.5) A.N: $\tau = \frac{\ln 3}{0.5} \approx 2.2\text{s}$. (0.5)