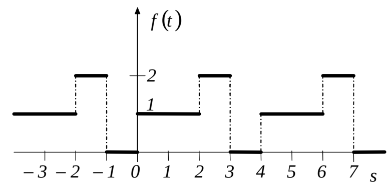
Exercice 1 Série de Fourier. $\boxed{\text{4 Points}}$

Soit la fonction périodique $f(t)$ ci-contre.

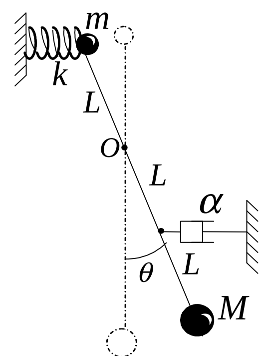


1. Quelle est la période T de cette fonction.
2. Donner le développement en série de Fourier de cette fonction.

<u>Rappel</u>: *La série de Fourier d'une fonction périodique $f(t)$ est:*

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin(n\omega t).$$

Exercice 2 Système amorti. $\boxed{\text{8 Points}}$

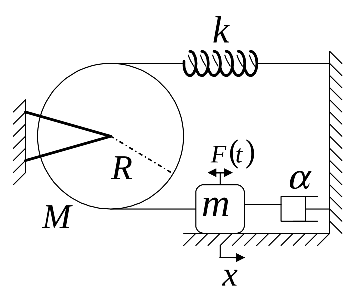


Une tige de longueur $3L$ porte en ses extrémités les masses M et m. La tige peut tourner autour du point O. L'ensemble des frottements est symbolisé par l'amortisseur de coefficient α. A l'équilibre le ressort était non déformé et la tige était vérticale (*représentée en pointillé.*)

1. Trouver l'énergie cinétique T, l'énergie potentielle U, et la fonction de dissipation $\mathcal{D}$. ($\theta \ll 1$.)
2. Trouver le Lagrangien et déduire l'équation du mouvement.
3. Sachant que M=2kg, m=1kg, k=5N/m, L=1m, α=54N.s/m, g=10m/s^2 : trouver la nature du mouvement.
4. Quelle est la valeur maximale que α ne doit pas dépasser pour qu'il y ait oscillations.
5. Lorsque $\alpha = 9$N.s/m, le système oscille mais son amplitude diminue au cours du temps. Trouver le temps $\boldsymbol{\tau}$ au bout duquel l'amplitude diminue à **1/5** de sa valeur.

<u>Rappel</u>: *Pour* $\theta \ll 1$: $sin\theta \approx \theta$, $cos\theta \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$.

Exercice 3 Système forcé. $\boxed{\text{8 Points}}$



Dans le système ci-contre, Le disque de masse M et de rayon R peut tourner librement autour de son axe fixe. La masse m sur le plan horizontal est reliée à un amortisseur de coefficient α et au disque par un fil inextensible et non glissant. A l'équilibre le ressort était non déformé.

Une excitation sinusoïdale $F(t)$=$F_0 cos\Omega t$ est appliquée sur la masse m.

1. Trouver l'énergie cinétique T, l'énergie potentielle U, et la fonction de dissipation $\mathcal{D}$. (Pour la variable $x \ll 1$.)
2. Trouver le Lagrangien et déduire l'équation du mouvement.
3. En utilisant l'équation du mouvement et la représentation complexe, trouver l'amplitude A et la phase ϕ de la solution permanente $x(t)$=$Acos(\Omega t + \phi)$.
4. Déduire la pulsation de résonance Ω_R.
5. Donner la facteur de qualité Q et la bande passante B du système (Amortissement faible $\lambda \ll \omega_0$.)

<u>Rappel</u>: *Le moment d'inertie du disque autour de son axe est* $I = \dfrac{1}{2}MR^2$.

Exercice 1

1. La période de la fonction est $\boxed{\mathrm{T=}\mathbf{4s}}$. 0,5

2. $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\ \mathrm{d}t$ 0,5 $= \frac{1}{4}\left[\int_0^2 1.\mathrm{d}t + \int_2^3 2.\mathrm{d}t + \int_3^4 0.\mathrm{d}t\right] = \mathbf{1}.$ 0,5

$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\ cos\frac{2\pi nt}{T}\ \mathrm{d}t$ 0,5 $= \frac{2}{4}\left[\int_0^2 1.cos\frac{\pi nt}{2}\mathrm{d}t + \int_2^3 2cos\frac{\pi nt}{2}\mathrm{d}t + \int_2^3 0.\mathrm{d}t\right] = \frac{2}{\pi\mathbf{n}} sin\frac{3\pi\mathbf{n}}{2}.$ 0,5

$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\ sin\frac{2\pi nt}{T}\ \mathrm{d}t$ 0,5 $= \frac{2}{4}\left[\int_0^2 1.sin\frac{\pi nt}{2}\mathrm{d}t + \int_2^3 2sin\frac{\pi nt}{2}\mathrm{d}t + \int_2^3 0.\mathrm{d}t\right]$

$= \frac{1}{\pi\mathbf{n}}(1 + cos\pi\mathbf{n} - 2cos\frac{3\pi\mathbf{n}}{2}).$ 0,5

Donc, $f(t) = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi\mathbf{n}} sin\frac{3\pi\mathbf{n}}{2} cos\mathbf{n}\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi\mathbf{n}}(1 + cos\pi\mathbf{n} - 2cos\frac{3\pi\mathbf{n}}{2}) sin\mathbf{n}\omega t.$ 0,5

Exercice 2

1. $T = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M(2L)^2\dot{\theta}^2 = \boxed{\frac{1}{2}(m+4M)L^2\dot{\theta}^2.}$ 0,5 $\boxed{\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha L^2\dot{\theta}^2.}$ 0,5

$U \approx \frac{1}{2}kL^2\theta^2 - mg(L - Lcos\theta) + Mg(2L - 2Lcos\theta) \approx \boxed{\frac{1}{2}(kL^2 - mgL + 2MgL)\theta^2.}$ 1

2. Le Lagrangien est: $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}(m + 4M)L^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(kL^2 - mgL + 2MgL)\theta^2.$

L'équation du mouvement est: $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m+4M}\dot{\theta} + \frac{kL-mg+2Mg}{(m+4M)L}\theta = 0.}$ 0,5

3. L'équation est de la forme: $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$: avec $\boxed{\lambda = \frac{\alpha}{2(m+4M)},\ \omega_0^2 = \frac{kL-mg+2Mg}{(m+4M)L}.}$ 0,5

A.N: $\boxed{\lambda^2 - \omega_0^2}$ 0,5 $\approx \boxed{\mathbf{5{,}1rad^2.s^{-2}}>0.}$ 0,5 Le mouvement est donc **apériodique.** 0,5

4. Pour qu'il y ait oscillations, il faut que $\boxed{\lambda^2 - \omega_0^2 < 0.}$ 0,5

$\Longrightarrow \boxed{\alpha < 2\sqrt{(kL - mg + 2Mg)(m+4M)/L}}$ 0,5 $\approx \boxed{\mathbf{35{,}5N.m^{-1}.s.}}$ 0,5

5. Pour $\alpha = 9\mathrm{N.m^{-1}.s}$: $\boxed{\lambda = \mathbf{0{,}5s^{-1}}.}$ 0,5 et nous avons: $\boxed{Ae^{-\lambda(t+\tau)} = \frac{1}{5}Ae^{-\lambda t}.}$ 0,5

$\Longrightarrow \boxed{\lambda\tau = \ln 5}$ 0,5 $\Longrightarrow \tau = \frac{\ln 5}{\lambda} \approx \boxed{\mathbf{3{,}22s.}}$ 0,5

Exercice 3

1. $T = T_M + T_m = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \boxed{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}M + m)\dot{x}^2.}$ 1 (Car $x = R\theta$.)

$U = U_k = \frac{1}{2}kR^2\theta^2 = \boxed{\frac{1}{2}kx^2.}$ 0,5 $\mathcal{D} = \boxed{\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2.}$ 0,5

2. Le Lagrangien est: $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}M + m)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2.$

$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{x}} + F}$ 0,5 $\Longrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{\alpha}{m+\frac{1}{2}M}\dot{x} + \frac{k}{m+\frac{1}{2}M}x = \frac{F}{m+\frac{1}{2}M}.}$ 0,5

L'équation est de la forme: $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m+\frac{1}{2}M}$: avec $\boxed{\lambda = \frac{\alpha}{2(m+\frac{1}{2}M)},\ \omega_0^2 = \frac{k}{(m+\frac{1}{2}M)}.}$ 0,5

3. En utilisant la représentation complexe

$\boxed{\begin{array}{l} F_0 cos(\Omega t) \longrightarrow \underline{F} = F_0 e^{j\Omega t} \\ x = Acos(\Omega t + \phi) \longrightarrow \underline{x} = \underline{A}e^{j\Omega t} \end{array}}$ 0,5 $\Rightarrow \ddot{\underline{x}} + 2\lambda\dot{\underline{x}} + \omega_0^2\underline{x} = \frac{\underline{F}}{m+\frac{1}{2}M} \Rightarrow \boxed{(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\lambda\Omega)\underline{A} = \frac{F_0}{m+\frac{1}{2}M}}$ 0,5

$\Longrightarrow \boxed{\underline{A} = \frac{F_0/(m+\frac{1}{2}M)}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\lambda\Omega}}$ 0,5 $\Longrightarrow \boxed{A = \frac{F_0/(m+\frac{1}{2}M)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}}$ 0,5 et $\boxed{tan\phi = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.}$ 0,5

4. La pulsation de résonance est Ω_R telle que $\frac{\partial A}{\partial\Omega} = 0$ 0,5, soit $\Omega_R = \boxed{\sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}.}$ 0,5

5. Le facteur de qualité du système est $\boxed{Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}}$ 0,5, la bande passante est $\boxed{B \approx 2\lambda.}$ 0,5