UNIVERSITÉDE LAGHOUAT *Le 4 février 2016*
DÉPARTEMENT D'ÉLECTRONIQUEDurée 1h30
3°Licence STR

EXAMEN FINAL
Ondes et Propagation

QUESTIONS DE COURS (5pts)

I- On considère un milieu linéaire, homogène, isotrope, sans sources réelles et non magnétique.

- *Quelles sont les relations constitutives vérifiées par le milieu ?* 3
- *A partir des équations de Maxwell dans le vide, montrer que le champ magnétique peut être régi par l'équation de Helmholtz (L'équation d'onde) en utilisant l'identité vectorielle*

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{X}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{X}) - \nabla^2 \vec{X}$$

Rép

- *les relations constitutives vérifiées par un milieu LHI et non magnétique* 1

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Où $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ est la permittivité du milieu et $\mu = \mu_r \mu_0 = \mu_0$ Sa perméabilité ($\mu_r = 1$, pour un matériau non magnétique) 1

- *L'équation de Helmholtz*

En appliquant le rotationnel ($\vec{\nabla} \times$) à la première équation, on obtient :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{H}$$

Où, en remplaçant $\vec{\nabla} \times \vec{H}$ de la 2° équation d eMaxwell,

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{J}_e\right) = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Puisque le milieu est sans sources,$\vec{J}_e = 0$
En utilisant l'identité vectorielle

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{X}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{X}) - \nabla^2 \vec{X}$$

On obtient

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

1

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

De la même façon on obtient

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Qui sont bien des équations d'onde ou de Helmholtz.
En régime harmonique, nous obtenons ces équations d'onde.

$$\boxed{\begin{matrix} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \end{matrix} \quad \text{où } k^2 = \mu\varepsilon\omega^2}$$

1pts *II- définir les paramètres d'une ondes EM*

Rép 1

Les paramètres de bases d'une onde sont:

- *La polarisation*
- *la direction de propagation*
- *la fréquence et la longueur d'onde*
- *le vecteur nombre d'onde*
- *la constante d'atténuation (ou son inverse la profondeur de peau)*

III- 1pts Montrer à partir de la loi de Gauss que la loi de conservation de la charge peut se mettre sous la forme :

$$div\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Sachant que $\nabla \cdot (\vec{\nabla} \times) = 0$

Rép

1

D'après l'équation de Gauss,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \Longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \Longrightarrow \nabla \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = 0 = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}\right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \Longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

D'où

$$div\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

EXERCICE N°1 (6pts)

1. *Rappeler les équations de Maxwell reliant les vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{E}$* 1
2. *Établir les équations de propagation du champ $\vec{E}$ et du champ $\vec{B}$ dans le vide.* 1
3. *Les équations de propagation de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$ dans le vide admettent comme solutions dans le cas de la propagation d'une onde plane monochromatique :* 1

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \text{ et } \vec{B} = \vec{B}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$\vec{E}_0$et $\vec{B}_0$ sont deux vecteurs constants.

4. *Calculer* 1

$rot\vec{E} = \nabla \times \vec{E}, rot\vec{B} = \nabla \times \vec{B}$ $\quad div\vec{E} = \nabla \cdot \vec{E}, div\vec{E} = \nabla \cdot \vec{E}$

5. *Montrer que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont transversaux et que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires entre eux.* 1

6. *On considère une OPE (Onde Plane Électromagnétique) :*

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz)\hat{x}.$$

1

Préciser le sens et la vitesse de propagation ainsi que la direction de vibration de $\vec{E}$. Déterminer $\vec{B}$.

Rép

1. *Rappeler les équations de Maxwell reliant les vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{E}$*

1

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{J}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

2. *Établir les équations de propagation du champ $\vec{E}$ et du champ $\vec{B}$ dans le vide.*

1

Voir la 2° question de cours

$$\boxed{\begin{matrix} \nabla^2\vec{E} + k^2\vec{E} = 0 \\ \nabla^2\vec{B} + k^2\vec{B} = 0 \end{matrix} \text{ où } k^2 = \mu\varepsilon\omega^2}$$

1. *Les équations de propagation de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$ dans le vide admettent comme solutions dans le cas de la propagation d'une onde plane monochromatique :*

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \text{ et } \vec{B} = \vec{B}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

$\vec{E}_0$et $\vec{B}_0$ sont deux vecteurs constants.

1. *Calculer*

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}, \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}, \text{et } \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$$

- ✓ *Calcul de $\nabla \times \vec{E}$*

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = j\vec{k} \times \vec{E}$$

$$\hat{x}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) - \hat{y}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

Où

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$$

On remarque que chaque dérivation spatiale équivaut à une multiplication par la composante de $j\vec{k}$ qui lui correspond, comme par exemple

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = -E_{0z} j k_y + E_{0y} j k_z$$
$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) = -E_{0z} j k_x + E_{0x} j k_z$$
$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = -E_{0y} j k_x + E_{0x} j k_y$$

D'où

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\vec{k} \times \vec{E}$$

De la même façon, on montre que

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -j\vec{k} \times \vec{B}$$

Pour les divergences, on a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = j k_x E_{0x} e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} - j k_y E_{0y} e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} - j k_z E_{0z} e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} = -j k_x E_x - j k_y E_y - j k_z E_z$$

Qui est le produit scalaire du vecteur $j\vec{k}$ par $\vec{E}$. Donc

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -j\vec{k} \cdot \vec{E}$$

De même

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = -j\vec{k} \cdot \vec{B}$$

2. *Montrer que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont transversaux et que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires entre eux.*

1

D'après les deux dernières équations de Maxwell, on a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -j\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = -j\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

Qui montrent que

$$\vec{k} \perp \vec{E} \text{ et } \vec{k} \perp \vec{B}$$

De même, d'après les deux premières équations, on a:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\vec{k} \times \vec{E} = -j\omega\vec{B}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -j\vec{k} \times \vec{B} = \varepsilon\mu j\omega\vec{E}$$

Ce qui montre que $\vec{B}$et $\vec{E}$ sont perpendiculaires entre eux.

3. *On considère une OPE (Onde Plane Électromagnétique) :*

1

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\hat{x}.$$

Préciser le sens et la vitesse de propagation ainsi que la direction de vibration de $\vec{E}$. Déterminer $\vec{B}$.

Soit une OPE (Onde Plane Électromagnétique) :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\hat{x}.$$

Qu'on peut écrire sous forme complexe

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\hat{x} = \hat{x} E_0 e^{j(\omega t - kz)}$$

- ✓ *Cette onde se propage suivant l'axe des z.*
- ✓ *La direction de vibration et qu indique la polarisation de l'onde est une polarisation linéaire suivant l'axe des x.*
- ✓ *La vitesse de propagation $v = \omega/k$*

Le champ $\vec{B}$ sera déterminé à travers la 1°équation de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\vec{B}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_0 e^{j(\omega t - kz)} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 0\hat{x} - \hat{y}\left(jkE_0 e^{j(\omega t - kz)}\right) + 0\hat{z} = -j\omega\vec{B}$$

$$\hat{y} E_0 e^{j(\omega t - k\ )} = \omega\vec{B} \rightarrow \boxed{\hat{y}\frac{E_0}{\omega} e^{j(\omega t - k\ )} = \vec{B}}$$

EXERCICE N°2(5pts)

Le champ électrique d'une onde plane uniforme dans un milieu non magnétique s'écrit

$$\vec{E} = E_0 e^{-2z} \cos(2\pi 10^6 t - 2z)\hat{x} \qquad (V/m).$$

Donner

a) *l'expression du champ magnétique* 1

b) *la constante complexe de propagation.* 1

En déduire la longueur d'onde

c) *la profondeur de pénétration,* 1

d) *la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting.* 2

Rép.

Le champ électrique d'une onde plane uniforme dans un milieu non magnétique s'écrit

$$\vec{E} = E_0 e^{-2z} \cos(2\pi 10^6 t - 2z)\hat{x} \qquad (V/m).$$

Pour simplifier les calculs, on réécrit le champ électrique sous forme complexe

$$\vec{E} = E_0 e^{-2z} \cos(2\pi 10^6 t - 2z)\hat{x}$$
$$= \hat{x} E_0 e^{-2z} e^{j(2\pi 10^6 t - 2z)}$$
$$= \hat{x} E_0 e^{j2\pi 10^6 t} e^{-2(1+j)z}$$

Si on pose $jk_c = 2(1+j)$, le champ s'écrit comme:

$$\boxed{\vec{E} = \hat{x} E_0 e^{j2\pi 10^6 t} e^{-jk_c z}}$$

a. *l'expression du champ magnétique*

Puisque l'onde est une onde plane, le champ magnétique est relié au champ électrique par la relation

$$-j\vec{k_c} \times \vec{E} = -j\omega\vec{B}$$

Où $\vec{k_c} = jk_c\hat{z}$ où $k_c = 2(j-1)$

$$\vec{k_c} \times \vec{E} = \omega\vec{B}$$

$$\frac{k_c}{\omega}\hat{z} \times \hat{x} E_0 e^{j2\pi 10^6 t} e^{-jk_c z} = \vec{B}$$

$$\boxed{\underline{\vec{B}} = \hat{y}\frac{2(j-1)}{\omega} E_0 e^{j2\pi 10^6 t} e^{-jk_c z}}$$

Ou

$$\boxed{\vec{B} = \frac{2(j-1)}{\omega} E_0 e^{-2z} \cos(2\pi 10^6 t - 2z)\hat{y}}$$

b. *La constante complexe de propagation γ*

$$\vec{E} = E_0 e^{-2z} \cos(2\pi\ 10^6 t - 2z)\hat{x}$$
$$\rightarrow \underline{\vec{E}} = \underline{E_0} e^{-2z} e^{-j2z}\hat{x}$$

Qui est de la forme

$$\underline{E_0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}\hat{x}$$

$\omega = 2\pi\ 10^6$, $\alpha = 2$ *et* $\beta = 2$

$$k_c = \beta - j\alpha = \omega\sqrt{\mu(\varepsilon' - j\varepsilon'')} = 2 - 2j$$

Ou bien

$$\boxed{\gamma = jk_c = \alpha + j\beta = 2 + 2j}$$

c. *La profondeur de pénétration*

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = 0.5$$

d. *L'impédance d'onde complexe*

On a

On vu que

$$\vec{k_c} \times \vec{E} = \omega\vec{B}$$

En module

$$k_c E = \omega B = \omega\mu_0 B$$

D'où

$$\eta_c = \frac{E}{H} = \frac{\omega\mu_0}{k_c} = \frac{2\pi\ 10^6 \times 4\pi\ 10^{-7}}{2 - 2j} = \frac{\pi\ \times 4\pi\ 10^{-1}}{1 - j}$$

En multipliant par l'expression conjuguée, on obtient:

$$\boxed{\eta_c = 0.2\pi^2(1+j)\Omega = 1{,}97 + j1{,}97\Omega = 2{,}79 e^{j4\ ^\circ}\Omega}$$

e. *Le vecteur de Poynting*

On calcule tout d'abord :

$$\underline{\vec{H}} = \frac{\underline{\vec{B}}}{\mu_0} = \hat{y}\frac{2(j-1)}{\mu_0\omega} E_0 e^{j2\pi 10^6 t} e^{-jk_c z}$$

$$\underline{\vec{H}}^* = \hat{y}\frac{2(1-j)}{\mu_0\omega} E_0 e^{-2z} e^{-j(2\pi 10^6 t - 2z)}$$

Le vecteur de Poynting moyen est par définition:

$$\vec{\mathbb{S}} = \vec{E} \times \vec{H}^* = \hat{x} E_0 e^{-2z} e^{j(2\pi 10^6 t - 2z)}$$
$$\times\ \hat{y}\frac{2(1-j)}{\mu_0\omega} E_0 e^{-2z} e^{-j(2\pi 10^6 t - 2z)}$$

$$\boxed{\vec{\mathbb{S}} = \vec{E} \times \vec{H}^* = \hat{z} E_0^2 \frac{2(1-j)}{\mu_0\omega} e^{-4z}}$$

La puissance moyenne transportée par l'onde est donc:

$$\boxed{\langle\vec{\mathbb{S}}\rangle = \frac{1}{2}\mathcal{Re}\{\vec{E} \times \vec{H}^*\} = \hat{z} E_0^2 \frac{2}{\mu_0\omega} e^{-4z}}$$

EXERCICE N°3(4pts)

Une mesure de champ électromagnétique a été effectuée dans un appartement situé à proximité d'un émetteur radiofréquence. La mesure est effectuée à l'aide d'un mesureur de champ électrique. La mesure indique un champ électrique d'amplitude crête de 10 V/m.

i. *Déterminez la densité de puissance crête et moyenne transportée par l'onde électromagnétique.* 2

ii. *Les recommandations européennes d'exposition du public aux champs électromagnétiques exigent que les personnes ne soient pas soumises à une densité de puissance crête > 2 W/m². Que concluez-vous de cette mesure ?* 2

Rép.

i. *On suppose un régime sinusoïdal. La puissance crête transportée par l'énergie électromagnétique est de :*

$$P_{max} = |E| \times |H|$$

La puissance moyenne de

$$P_{moy} = 1/2 \times |E| \times |H|.$$

En supposant que l'onde est plane (mode TEM), ce qui est vrai à une distance suffisamment importante de l'émetteur radiofréquence (condition de champ lointain), les champs électrique et magnétique de l'onde sont en phase et reliés par l'impédance d'onde $\eta = 377$ dans l'air ou dans le vide :

$$\frac{|E|}{|H|} = \eta$$

La puissance transportée par l'onde mesurée est de :

$$P_{max} = |E| \times |H| = \frac{|E|}{\eta} = \frac{100}{377} = 265\ mW/m^2$$

$$P_{moy} = \frac{1}{2} \times |E| \times |H| = \frac{1}{2} P_{max} = 133\ mW/m^2$$

ii. La puissance crête transportée par l'onde est environ 10 fois plus faible que la limite prévue par la recommandation d'exposition du public. A priori, il n'y a pas de problèmes légaux liés à l'exposition du public et donc pas de modifications à apporter par le propriétaire de l'émetteur (hormis si le principe de précaution est appliqué).

Bon travail