UNIVERSITE A.M.O BOUIRA
FACULTE DES SCIENCES ET DES SCINECES APPLIQUEES
DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

2ème ANNEE – SEMESTRE 4
2016/2017

EXAMEN DE METHODES NUMERIQUES

EXERCICE 1 (10 pts)

On considère l'équation $f(x) = 0$, avec $f(x) = ln(x) - x + 2$

1. a) Ecrire l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $f_1(x) = f_2(x)$ avec $f_1(x) = ln(x)$.
   b) Tracer les graphes de f_1 et f_2. Que peut-on dire concernant l'équation $f(x) = 0$?
2. a) Faire 4 itérations de la méthode de dichotomie à partir de l'intervalle [3,4].
   Quelle itération a donné le meilleur résultat ? Justifier et conclure.
   b) Déterminer le nombre d'itérations n à faire pour avoir $\Delta x \leq 10^{-4}$.
   c) Donner une estimation de l'erreur après 25 itérations.
3. a) Approcher la racine à 10^{-4} près par la méthode de Newton en posant $x_0 = 3$.
   (utiliser 4 chiffres après la virgule)
4. D'après les résultats des questions 2.b) et 3.a), comparer les deux méthodes et conclure.

EXERCICE 2 (8 pts)

On considère l'intégrale suivante

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$$

1. Calculer la valeur exacte de cette intégrale.
2. Evaluer numériquement cette intégrale en utilisant :
   a) La méthode des rectangles composite avec 5 intervalles
   b) La méthode des trapèzes composite avec 4 intervalles
   c) La méthode de Simpson simple
   d) La méthode de Simpson composite avec 2 intervalles

(Utiliser 4 chiffres après la virgule)

EXERCICE 3 (2 pts)

Soit une équation $f(x) = 0$ à résoudre sur un intervalle $[a,b]$ par la méthode de Newton.

Déterminer l'expression du nombre d'itérations n qu'il faudrait faire pour avoir $\Delta x \leq \varepsilon$, ε donné

UNIVERSITE A.M.O BOUIRA
FACULTE DES SCIENCES - DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

2ème ANNEE – SEMESTRE 4
2016/2017

CORRIGE DE L'EXAMEN DE METHODES NUMERIQUES

EXERCICE 1 (10 pts)

On considère l'équation $f(x) = 0$, avec $f(x) = ln(x) - x + 2$

1. *Séparation des racines*

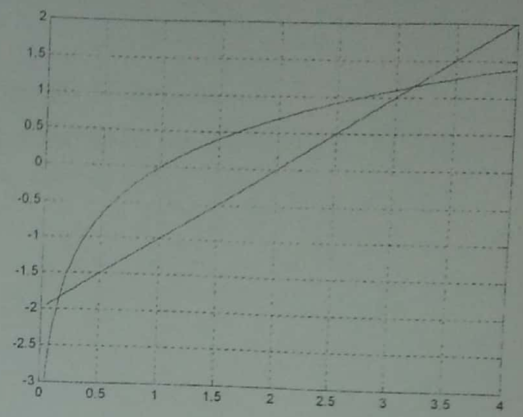
a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow ln(x) - x + 2 = 0$ 0.5

$\Leftrightarrow ln(x) = x - 2$

$\Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x)$

avec $f_1(x) = ln(x)$ et $f_2(x) = x - 2$

b) Les graphes de f_1 et f_2 possèdent 2 points d'intersection, donc l'équation $f(x) = 0$ possède 2 racines $\alpha_1 \in [0,1]$, $\alpha_2 \in [3,4]$ 0.5



1

2. *Méthode de dichotomie*

a) 4 itérations de la méthode de dichotomie à partir de l'intervalle [3,4]

N^o itr.	a	b	$x_i = (a+b)/2$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_i)$	Δx	
1	3	4	3.5	0.0986	- 0.6137	- 0.2472	0.5	0.5
2	3	3.5	3.25	0.0986	- 0.2472	- 0.0713	0.25	0.5
3	3	3.25	3.125	0.0986	- 0.0713	0.0144	0.125	0.5
4	3.125	3.25	3.1875	0.0144	- 0.0713	- 0.0283	0.0625	0.5

$x_3 = 3.125$ (3ème itération) est le meilleur résultat obtenu (même par rapport à x_4) car $f(x_3) = 0.0144$ est le plus proche de 0. On conclu que même si la convergence de la méthode de Dichotomie vers la racine est sûre, elle n'est pas monotone.

1

b) Nombre d'itérations n à faire pour avoir $\Delta x \leq 10^{-4}$

$$\Delta x \leq 10^{-4} \Rightarrow n \geq \frac{ln\left(\frac{b-a}{10^{-4}}\right)}{ln(2)} = \frac{ln\left(\frac{1}{10^{-4}}\right)}{ln(2)} \approx 13.29 \Rightarrow n = 14$$ 1

c) Estimation de l'erreur après 25 itérations

0.5

$$\Delta x \leq \frac{b-a}{2^n} \Rightarrow \Delta x \leq \frac{4-3}{2^{25}} \Rightarrow \Delta x \leq 2.98 \times 10^{-8}$$

3. *Méthode de Newton*

a) Approche de la racine à 10^{-4} près par la méthode de Newton avec $x_0 = 3$

Algorithme de Newton $\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{cases}$ 0.25

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3.1479$ $\quad |x_1 - x_0| = |3.1479 - 3| = 0.1479$ 0.75

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 3.1479 - \frac{f(3.1479)}{f'(3.1479)} = 3.1462$ $\quad |x_2 - x_1| = |3.1462 - 3.1479| = 0.0017$ 0.75

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 3.1462 - \frac{f(3.1462)}{f'(3.1462)} = 3.1462$ $\quad |x_3 - x_2| = |3.1462 - 3.1462| = 0.0000$ 0.75

4. *Comparaison des deux méthodes*

Pour atteindre une précision de 10^{-4} il faudrait faire 14 itérations de la méthode de dichotomie alors que la méthode de Newton ne nécessite que 3 itérations. La méthode de Newton converge beaucoup plus rapidement que la méthode de dichotomie. 1

EXERCICE 2 (8 pts)

1. *Valeur exacte de I* 1

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [arctg(x)]_0^1 = arctg(1) \approx 0.7854$$

2. *a) Méthode des rectangles composite avec 5 intervalles* 2

$$I_R = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

$$n = 5, \qquad h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$x_0 = 0\,;\ x_1 = 0.2\,;\ x_2 = 0.4\,;\ x_3 = 0.6\,;\ x_4 = 0.8$$

$$I_R = h\big(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)\big)$$

$$I_R = 0.2\left(1 + \frac{1}{1.04} + \frac{1}{1.16} + \frac{1}{1.36} + \frac{1}{1.64}\right) \approx 0.8337$$

b) Méthode des trapèzes composite avec 4 intervalles 2

$$I_T = h\left(\frac{f(b) - f(a)}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right)$$

$$n = 4,\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$x_0 = 0\,;\ x_1 = 0.25\,;\ x_2 = 0.5\,;\ x_3 = 0.75$$

$$I_T = h\left(\frac{f(b) - f(a)}{2} + \big(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\big)\right)$$

$$I_T = 0.25\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) + \left(1 + \frac{1}{1.0625} + \frac{1}{1.25} + \frac{1}{1.5625}\right)\right) \approx 0.7828$$

c) Méthode des Simpson simple

$$I_2 = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

1

$$I_2 = \frac{1-0}{6}\big(f(0) + 4f(0.5) + f(1)\big) = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{4}{1.25} + \frac{1}{2}\right) \approx 0.7833$$

$$I_s = \frac{h}{6}\left[f(b) - f(a) + 2\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right]$$

$n = 2,\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$ 2

$x_0 = 0\ ;\ x_1 = 0.5\ ;\ x_2 = 1\ ;\ \frac{x_0 + x_1}{2} = 0.25\ ;\ \frac{x_1 + x_2}{2} = 0.75$

$$I_s = \frac{h}{6}\left[f(b) - f(a) + 2\big(f(x_0) + f(x_1)\big) + 4\left(f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right)\right]$$

$$I_s = \frac{0.5}{6}\left[\frac{1}{2} - 1 + 2\left(1 + \frac{1}{1.25}\right) + 4\left(\frac{1}{1.0625} + \frac{1}{1.5625}\right)\right] \approx 0.7854$$

EXERCICE 3 **(2 pts)**

L'erreur absolue après n itérations de la méthode Newton pour la résolution d'une équation $f(x) = 0$ sur un intervalle $[a,b]$ est donnée par :

$\Delta x \leq \frac{1}{c}[c(b-a)]^{2^n}$ avec $c = \max_{x\in[a,b]}\left|\frac{f''(x)}{2f'(x)}\right|$ 0.5

Donc pour avoir $\Delta x \leq \varepsilon$ il suffit de mettre :

$\frac{1}{c}[c(b-a)]^{2^n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow [c(b-a)]^{2^n} \leq c\varepsilon \Leftrightarrow 2^n\, ln[c(b-a)] \leq ln(c\varepsilon)$

$\Leftrightarrow 2^n \geq \frac{ln(c\varepsilon)}{ln[c(b-a)]}$ (le choix de l'intervalle $[a,b]$ est tel que $c(b-a) < 1$, donc $ln[c(b-a)] < 0$)

$\Leftrightarrow n\, ln(2) \geq ln\left(\frac{ln(c\varepsilon)}{ln[c(b-a)]}\right) \Leftrightarrow n \geq \frac{ln\left(\frac{ln(c\varepsilon)}{ln[c(b-a)]}\right)}{ln(2)}$ 1.5

Scanned by CamScanner