Université M. B. Boumerdes — Filière :LMD STH

Faculté des sciences -Département de Mathématiques — Année 2012/2013

Correction d'examen d'Analyse Numériques

Exercice 1 :(9pt)

Soit la fonction : $f(x) = x^3 - e^{-x}$

1) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine séparée $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

f est dérivable et continue sur $\mathbb{R}$ (somme de deux fonctions continues) ……. $\boxed{0,25}$

$f'(x) = 3x^2 + e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ……. $\boxed{0,25}$

$f(1/2) = \frac{1}{8} - e^{-1/2} \approx -0,48$ et $f(1) = 1 - e^{-1} \approx 0,63$

x	½	1
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-0,48$ ↗	$0,63$

……. $\boxed{0,5}$

On a $f(1/2) \times f(1) = -0,48 \times 0,63 < 0$ et f est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

alors $\exists! \, \alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ telle que $f(\alpha) = 0$. ……. $\boxed{0,5}$

b) Calcul du nombre d'itération : $\varepsilon = 0,5.10^{-1}$

$$n = \left[\frac{Ln\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)}{Ln2}\right] + 1 = \left[\frac{Ln\left(\frac{1-1/2}{2.0,5.10^{-1}}\right)}{Ln2}\right] + 1 \rightarrow n = 3 \;\ldots\ldots \boxed{0,5}$$

c) Calcul de l'approximation : ……. $\boxed{1,75}$

n	a_n	x_n	b_n	$f(a_n)$	$f(x_n)$	$f(b_n)$
0	1/2	3/4	1	−0,48	−0,05	0,63
1	3/4	7/8	1	−0,05	0,25	0,63
2	3/4	13/16	7/8	−0,05	0,09	0,25
3	3/4	25/32	13/16			

Donc $x_3 = \frac{25}{32} = 0,78125$

Estimation du résultat au dernier c.s.e :

$\varepsilon = 0,5.10^{-1}$ et $\begin{cases} m - n + 1 = -1 \\ m = -1 \end{cases} \rightarrow n = 1$ ……. $\boxed{0,25}$

$$\alpha = x_{3\,arrondi} \pm 2\varepsilon = 0,8 \pm 10^{-1} \;\ldots\ldots \boxed{0,25}$$

2) a) Montrer que l'équation (1) est équivalente à l'équation $x = \varphi(x) = e^{\frac{-x}{3}}$:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow Ln(x^3) = Ln(e^{-x}) \Leftrightarrow 3Ln(x) = -x \Leftrightarrow Ln(x) = \frac{-x}{3} \Leftrightarrow$

$e^{Ln(x)} = e^{\frac{-x}{3}} \Leftrightarrow x = e^{\frac{-x}{3}} = \varphi(x)$ ……. $\boxed{0,5}$

b) Montrer que la suite itérative du point fixe $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge. $\varphi(x)$ est continu et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\varphi(x) = e^{\frac{-x}{3}}$, $\varphi'(x) = -\frac{1}{3}e^{\frac{-x}{3}} < 0$, $\varphi''(x) = \frac{1}{9}e^{\frac{-x}{3}} > 0 \ \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ …… $\boxed{0,5}$

x	1/2		1
φ''		+	
φ'	$-0,282$	$\nearrow$	$-0,238$
φ	$0,84$	$\searrow$	$0,716$

…… $\boxed{0,5}$

- la stabilité :

on a : $\varphi\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \varphi([0,716; 0,84]) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ donc φ est stable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ …… $\boxed{0,5}$

- La contractante :

On a : $\sup_{\left[\frac{1}{2},1\right]}|\varphi'(x)| = 0,28 < 1$ donc φ est contractante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ …… $\boxed{0,5}$

D'où la suite itérative du point fixe $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ …… $\boxed{0,25}$

c) calcul du nombre d'itérations : $\varepsilon = 0,5.10^{-1}$, $x_0 = 1$ et $k = 0,28$, $x_1 = \varphi(x_0) = 0,71$ … 0,25

$$n = \left[\frac{Ln\left(\frac{\varepsilon(1-k)}{|x_1 - x_0|}\right)}{Ln\, k}\right] + 1 = \left[\frac{Ln\left(\frac{0,5.10^{-1}(1-0,28)}{|0,71-1|}\right)}{Ln\, 0,28}\right] + 1 = 2 \text{ …… } \boxed{0,5}$$

d) Calcul de l'approximation :

$$x_2 = \varphi(x_1) = 0,7875 \text{ …… } \boxed{0,25}$$

Estimation du résultat au dernier c.s.e :

$$\varepsilon = 0,5.10^{-1} \text{ et } \begin{cases} m = -1 \\ m - n + 1 = -1 \end{cases} \rightarrow n = 1 c.s.e \text{ …… } \boxed{0,25}$$

$$\text{et} \quad \alpha = x_{2\,arrondi} \pm 2\varepsilon = 0,8 \pm 10^{-1} \text{ …… } \boxed{0,25}$$

3) Comparaison des deux méthodes : on remarque que la méthode de point fixe est le plus rapide car le nombre d'itération $n = 2$. …… $\boxed{0,5}$

Exercice 2 : (6pt)

1) le polynôme d'interpolation de f aux points 0,1 ,2 et 3 sous forme de Newton avec différences divisées : On a 4 points d'interpolations→ $deg P_3 \leq 3$ …… $\boxed{0,5}$ et s'écrit :

$$P_3(x) = f(x_0) + (x - x_0)\delta[x_0, x_1]f + (x - x_0)(x - x_1)\delta[x_0, x_1, x_2]f$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\delta[x_0, x_1, x_2, x_3]f \text{ …… } \boxed{0,5}$$

x_i	$f(x_i)$	DD1	DD2	DD3

On a $\begin{cases} a_{11}^{(1)} = 1 \neq 0 \\ a_{22}^{(2)} = \alpha^2 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0 \text{ donc A admet la décomposition LU si } \alpha \neq 0 \ldots\ldots \boxed{0,75} \\ a_{33}^{(3)} = \alpha^4 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0 \end{cases}$

3) Pour $\alpha = 1$, la matrice L et U :

$$U = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ldots\ldots \boxed{0,5} \; et \; L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \ldots\ldots \boxed{0,5}$$

4) Résolution du système $Ax = b$ par la méthode LU :

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases} \ldots\ldots \boxed{0,25} \; avec \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Ly = b \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ -y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 - y_2 + y_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 1 \end{cases} \rightarrow y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ldots\ldots \boxed{0,75}$$

$$Ux = y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ldots\ldots \boxed{0,75}$$

Exercice 4 : (5pt)

1) Détermination de l'erreur relative et l'erreur absolue de R :

- $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Leftrightarrow R = \frac{R_1 . R_2}{R_1 + R_2} = \frac{100 \times 200}{100 + 200} = 66,6666 \ldots\ldots \boxed{0,25}$
- En utilisant la formule générale $\Delta_f = \sum \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \Delta_{x_i}$ on trouve :

$$\Delta_R = \left|\frac{\partial R}{\partial R_1}\right| \Delta_{R_1} + \left|\frac{\partial R}{\partial R_2}\right| \Delta_{R_2} \ldots\ldots \boxed{0,5} \text{ avec } \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2(R_1+R_2) - R_1.R_2}{(R_1+R_2)^2} = \frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2} \ldots\ldots \boxed{0,5} \\ \frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_1(R_1+R_2) - R_1.R_2}{(R_1+R_2)^2} = \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2} \ldots\ldots \boxed{0,5} \end{cases}$$

Donc $\Delta_R = \frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2} \Delta_{R_1} + \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2} \Delta_{R_2} = \frac{1}{(R_1+R_2)^2} \left(R_2^2 \Delta_{R_1} + R_1^2 \Delta_{R_2}\right) \ldots\ldots \boxed{0,25}$

- $r_1\% = r_2\% = 5\% \rightarrow r_1 = r_2 = \frac{5}{100} = 0.05 \ldots\ldots \boxed{0,5}$
- $r_1 = \frac{\Delta_{R_1}}{R_1} \rightarrow \Delta_{R_1} = R_1 r_1 = 0.05 \times 100 = 5 \ldots\ldots \boxed{0,5}$
- $r_2 = \frac{\Delta_{R_2}}{R_2} \rightarrow \Delta_{R_2} = R_2 r_2 = 0.05 \times 200 = 10 \ldots\ldots \boxed{0,5}$
- $\Delta_R = \frac{1}{(R_1+R_2)^2} \left(R_2^2 \Delta_{R_1} + R_1^2 \Delta_{R_2}\right) = \frac{1}{(100+200)^2} \left((200)^2 \times 5 + (100)^2 \times 10\right)$ $r_R = 0,05 \ldots 0,5$

  $= 3,3333 < 5 < 0,5.10 \ldots\ldots \boxed{0,5}$
- On a : $m = 1$ et $m - n + 1 = 1 \rightarrow n = 1 c.s.e \ldots\ldots \boxed{0,5}$
- $R = R_{arrondi} \pm 2\Delta_R \rightarrow R = 70 \pm 10 \ldots\ldots \boxed{0,5}$