

Examen

Département S.M, 2^{ème} année LMD

Module INF

Biskra le 31/01/12

Exercice 1 (6 points)

$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant $|f^{(3)}(x)| \leq 1 \forall x \in [-1, 1]$. $L(x)$ est le polynôme d'interpolation de f en $x_0 = -1, x_1 = 0$ et $x_2 = 1$.

1. Etudier les variations de $x \rightarrow x^3 - x$, tracer son graphe pour $x \in [-1, 1]$ et calculer $\max |x^3 - x|$.
2. Prouver que $|f(x) - L(x)| \leq \frac{1}{9\sqrt{3}}$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

Exercice 2 (6 points)

On veut calculer la racine négative de l'équation $f(x) = x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$.

1. Calculer les images des points $x = 0, x = -10$ et $x = -100$.
2. Trouver $f(-11)$ et déduire un encadrement de ζ qui vérifie $f(\zeta) = 0$.
3. Calculer approximativement ζ .

Exercice 3 (6 points)

On désire développer une formule d'intégration de la forme : $\int_0^1 f(x) dx = a_0 f(\frac{1}{4}) + a_1 f(\frac{1}{2}) + a_2 f(\frac{3}{4})$.

1. En remplaçant $f(x)$ successivement par 1, x et x^2 . Obtenir un système de 3 équations à 3 inconnues.
2. Résoudre le système obtenu par la méthode d'élimination de Gauss.
3. Appliquer la formule ainsi obtenue pour approximer l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.

N.B. (2 points) Il sera tenu compte de la clarté et de la rigueur dans les démonstrations

تريو 1:

$\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] : f$ دالة تحقق $|f^{(3)}(x)| \leq 1$
كل x من $[-1, 1]$. $L(x)$ كثير حدود
الاستقطاب لـ f عند $x_0 = -1, x_1 = 0$ و $x_2 = 1$
1- ادرس تغيرات $x \rightarrow x^3 - x$ رسم عيناها
على $[-1, 1]$ احب $\max |x^3 - x|$
2- برهن ان $|f(x) - L(x)| \leq \frac{1}{9\sqrt{3}}$ لكل $x \in [-1, 1]$

تريو 2:

نريد حساب الجذر السالب للعادلة
 $f(x) = x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$
1- احب صور النقاط
 $x = 0, x = -10$ و $x = -100$
2- احب $f(-11)$ مستنتجا
حصرا لـ ζ الذي يحقق $f(\zeta) = 0$
3- احب ζ بآلة حاسبة

تريو 3:

نريد تشكيل دستور للدكا من الشكل
 $\int_0^1 f(x) dx = a_0 f(\frac{1}{4}) + a_1 f(\frac{1}{2}) + a_2 f(\frac{3}{4})$
2- بتعويض $f(x)$ بـ $1, x, x^2$
نحصل على ثلاثة معادلات
معادلات
2- اوجد حل المعادلة باستعمال Gauss
3- طبق الدستور لتقريب التكامل
 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$

ما نتو صوي