UNIVERSITÉ DE BOUMERDES . FACULTÉ DES SCIENCES . (X)
Département : INFORMATIQUE . G/I - 3ième année . 2004/05

β

Synthèse de CALCUL NUMÉRIQUE

EXERCICE 1 : (7 points)

Soit le système linéaire (S) suivant :
$$\begin{cases} 3x + z = 1 \\ -x + 2y + z = 2 \\ x + y - 4z = 3 \end{cases}$$

1°) Résoudre (S) par la méthode de Gauss ordinaire et en utilisant :

a) la forme fractionnaire des nombres utilisés.

b) que des nombres arrondis à 3 chiffres significatifs

2°) Calculer $\| \overline{X} - \widetilde{X} \|_1$, où : $\overline{X}$ et $\widetilde{X}$ sont les solutions exacte et approchée, respectivement, de (S).

3°) a) Montrer que la méthode de JACOBI, associée au système (S), converge pour tout vecteur initial $X^{(0)}$.

b) On prend $X^{(0)} = {}^t(0 \ 1 \ 0)$.

Determiner un nombre d'itérations suffisant pour avoir : $\| \overline{X} - X^{(k)} \|_1 < \| \overline{X} - \widetilde{X} \|_1$. Conclure.

EXERCICE 2 : (6 points)

Soit la fonction numérique f donnée par

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	2	1	0	1	2

1°) a) Determiner le polynôme d'interpolation de f, de degré inférieur ou égal à 4, en utilisant la formule de Newton-Grégory régressive.

b) Soit $P_4(x) = \frac{1}{6}\left[-x^4 + 7x^2\right]$. Calculer $P_4(x_i)$, pour tout i. Conclure.

c) En déduire une valeur approchée de $f\left(\frac{1}{3}\right)$. et estimer le résultat obtenu, sachant que $\sup\limits_{[-2,2]} \left| f^{(5)}(x) \right| \leq 10^{-2}$.

...a fonction numérique g définie par :

$$g(x) = (x^2 - 3x + 3)\, f(x)$$

1) Montrer, sans le calculer, que f et g ont le même polynôme d'interpolation aux points 0, 1 et 2.
2) Déterminer ce polynôme, en utilisant la formule de Newton-Grégory progressive.
3) Comment choisir $f(3)$ pour que f et g aient le même polynôme d'interpolation aux points 0, 1, 2 et 3 ? Déterminer, alors, ce polynôme.

EXERCICE 3 : (7 points)

1°) Soit $g(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que : $\exists! \, p \in [-1, 1] : p = g(p)$.

b) Déterminer p de manière exacte.

c) En déduire que : $\exists! \, r \in [3, 4] : r = g(r)$. Conclure.

2°) Soit $F(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que l'équation $F(x) = 0$ admet une unique racine positive s. Encadrer s par des nombres entiers a, b : $a < b$.

b) Montrer que la méthode de NEWTON est applicable pour la résolution approchée de l'équation $F(x) = 0$ dans $[a, b]$, pour tout $x_0 \in [a, b]$.

c) Calculer $F(\bar{x}_0)$ et $F'(\bar{x}_0)$, $\bar{x}_0 = \frac{a+b}{2}$, par l'algorithme de Horner.

d) Estimer l'erreur absolue commise en prenant x_1 comme valeur approchée de s, en partant de $x_0 = \bar{x}_0$ par l'algorithme de Newton. Conclure .....

N.B : Les questions 1°) et 2°) de l'exercice 3 sont indépendantes.

Corrigé de la synthèse

Ex 1 (7 pts)

Solution exacte $\overline{X}$

	x	y	z	b	Σ
$A^{(1)}$	3 -1 1	0 2 1	1 1 -4	1 2 3	5 4 1
Lp/p	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
$A^{(2)}$		2 1	4/3 -13/3	7/3 8/3	17/3 -2/3
Lp/p		1	2/3	7/6	17/6
$A^{(3)}$			-5	3/2	-7/2
Lp/p			1	-3/10	7/10

Résolution :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{3}z = \frac{1}{3} \\ y + \frac{2}{3}z = 7/6 \\ z = -\frac{3}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{3}{10} \\ y = \frac{41}{30} \\ x = \frac{13}{30} \end{cases}$$

d'où : $\overline{X} = \begin{pmatrix} 13/30 \\ 41/30 \\ -3/10 \end{pmatrix}$

b) solution approchée $\tilde{X}$

0,5 •

	x	y	z	b
$A^{(1)}$	3 -1 1	0 2 1	1 1 -4	1 2 3
Lp/p	1	0	0,333	0,333
$A^{(2)}$		2 1	1,33 -4,33	2,33 2,67
Lp/p		1	0,665	1,17
			-5	1,5
			1	-0,3

0,5 • $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 0{,}333\,z = 0{,}333 \\ y + 0{,}665\,z = 1{,}17 \\ z = -0{,}3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}433 \\ y = 1{,}37 \\ z = -0{,}3 \end{cases}$ d'où : $\tilde{X} = \begin{pmatrix} 0{,}433 \\ 1{,}37 \\ -0{,}3 \end{pmatrix}$

2°) $\|\overline{X} - \tilde{X}\|_1 = \|{}^t(3{,}33.10^{-4} \quad -3{,}33.10^{-3} \quad 0)\|_1 = 3{,}66.10^{-3} \simeq 0{,}004$.

3°) a) • $J = \begin{pmatrix} 0 & & -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \\ & 0 & \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & & 0 \end{pmatrix} = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/3 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$

• $\|J\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1} |J_{ij}|\right) = \max\left\{\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}\right\} = \frac{5}{6}$

• $\|J\|_1 < 1 \Rightarrow$ La méthode de JACOBI converge, $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

b) • $C = D^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ -3/4 \end{pmatrix}$

• $X^{(1)} = JX^{(0)} + C = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

0,5 • $\|\overline{X} - X^{(k)}\|_1 \leq \dfrac{\|J\|_1^k}{1 - \|J\|_1} \cdot \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_1 = 6\left(\frac{5}{6}\right)^{k+1}$

0,5 • $\|\overline{X} - X^{(k)}\|_1 < \|\overline{X} - \tilde{X}\|_1$ si $6\left(\frac{5}{6}\right)^{k+1} < 0{,}004$

on trouve $k > 39{,}11$. On prend $k = 40$.

0,5 • Conclusion : La méthode de Gauss + avantageuse.

(op5)

$x = ?$

$x_0=-2 \quad -1=x_1 \quad 0=x_2 \quad 1=x_3 \quad 2=x_4$, $(h=1)$

$f(x_i)$	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$	$\nabla^4 f$
$f(x_0)=2$				
$f(x_1)=1$	$\nabla f(x_1)=-1$			
$f(x_2)=0$	$\nabla f(x_2)=-1$	$\nabla^2 f(x_2)=0$		
$f(x_3)=1$	$\nabla f(x_3)=1$	$\nabla^2 f(x_3)=2$	$\nabla^3 f(x_3)=2$	
$f(x_4)=\boxed{2}$	$\nabla f(x_4)=\boxed{1}$	$\nabla^2 f(x_4)=\boxed{0}$	$\nabla^3 f(x_4)=\boxed{-2}$	$\nabla^4 f(x_4)=\boxed{-4}$

- $$P_f(x)=f(x_4)+(x-x_4)\frac{\nabla f(x_4)}{1!\,h}+(x-x_4)(x-x_3)\frac{\nabla^2 f(x_4)}{2!\,h^2}+(x-x_4)(x-x_3)(x-x_2)\frac{\nabla^3 f(x_4)}{3!\,h^3}$$
$$+(x-x_4)(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)\frac{\nabla^4 f(x_4)}{4!\,h^4}$$

- $$P_f(x)=2+(x-2)-\frac{1}{3}x(x-2)(x-1)-\frac{1}{6}x(x-2)(x-1)(x+1)$$

b) . $P_4\in\mathcal{P}_4$ et $\forall i\in\{0,1,..,4\}$ " $P_4(x_i)=f(x_i)$ d'où $P_4\equiv P_f$.

c) . $f(\frac{1}{3})\simeq P_4(\frac{1}{3})=\frac{31}{243}$, ie: $f(\frac{1}{3})\simeq 0{,}127572016$.

- Estimation: $|E_4(x)|\le \left|\prod_{i=0}^{4}(x-x_i)\right| \dfrac{\sup|f^{(5)}(x)|}{5!}$

- $|E_4(x)|\le 9{,}6.10^{-5}$
- $|E_4(x)|\le 50.10^{-5}=0{,}5.10^{-3}\Rightarrow \begin{cases} m-n+1=-3 \\ \text{avec } m=-1\end{cases} \Rightarrow n=3$ (c.s.c)

d'où $f(\frac{1}{3})=0{,}128\pm 0{,}001$.

2°) . a) Soient P et Q les polynômes d'interpolation de f et g (respectivement) aux points $x_0=0, x_1=1$ et $x_2=2$.
$P,Q\in\mathcal{P}_2$ et $[\forall i\in\{0,1,2\}\;\; f(x_i)=g(x_i)]\Rightarrow[\forall i\in\{0,1,2\}\;\; P(x_i)=Q(x_i)]$
$\Rightarrow P\equiv Q$. (polynômes de degré $\le$ à 2 qui coincident en 3 points).

$\ldots = f(x_0) + (x - x_0)\dfrac{\Delta f(x_0)}{1!\, h} + (x - x_0)(x - x_1)\dfrac{\Delta^2 f(x_0)}{2!\, h^2} = x$, car :

$f(x_0) = \boxed{0}$			
	$\Delta f(x_0) = \boxed{1}$		
$f(x_1) = 1$		$\Delta^2 f(x_0) = \boxed{0}$	
	$\Delta f(x_1) = 1$		$\Delta^3 f(x_0) = \boxed{-3}$
$f(x_2) = 2$		$\Delta^2 f(x_1) = -3$	
	$\Delta f(x_2) = -2$		
$f(x_3) = 0$			

c) $f(x_i) = g(x_i)$ $\forall i = 0, 1, 2$. Posons $x_3 = 3$.

Il suffit de choisir $f(3)$ tel que, $f(3) = g(3)$ i.e. $3f(3) = f(3)$.

Soit, $f(3) = 0$.

Dans ce cas : $P_3(x) = x - \frac{1}{2}x(x-1)(x-2)$.

EXERCICE 3 (7 pts)

1°) a) On utilise le théorème du point fixe.

• Stabilité : Pour $x \in [-1,1]$, $g'(x) = \frac{2}{3}x$

x	-1	0	1
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$0 \searrow$	$-1/3$	$\nearrow 0$

$g([-1;1]) = g([-1,0]) \cup g([0,1]) = [-\frac{1}{3}, 0]$

$g([-1,1]) \subset [-1,1]$ d'où la stabilité de g sur $[-1,1]$.

• Contraction :

$x \in [-1,1] \Leftrightarrow |x| \leq 1$

$\forall x \in [-1,1]$ $\quad |g'(x)| = |\frac{2}{3}x| \leq \frac{2}{3} < 1$ d'où g est contractante sur $[-1,1]$.

d'où, $\exists !\, p \in [-1,1]$ tel que $p = g(p)$

b) $\begin{cases} p = g(p) \\ p \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 - 3p - 1 = 0 \\ p \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \simeq -0{,}3 \text{ ou } p = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \simeq 3{,}3 \\ p \in [-1,1] \end{cases}$

d'où $p = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$.

c) D'après ce qui précède, $r = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ (pt fixe unique sur $[3,4]$)

• Conclusion : $g(3) = \frac{8}{3} \notin [3,4]$ ou $g(4) = 5 \notin [3,4]$ ou $|g'(4)| = \frac{8}{3} > 1$

on ne peut pas appliquer le théorème du point fixe sur $[3,4]$.

Les conditions du théorème sont donc suffisantes mais non nécessaires !

$F'(x) = 3x^2 + 8x = x(3x+8)$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x = 0 \text{ ou } x = -\frac{8}{3}\right)$

	+	$-8/3$	$-$	0	+

sgn F'

F continue sur $[0, +\infty[$

$F(0) = -10$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

$F'(x) \geq 0$ sur $[0, +\infty[$

x	0	$+\infty$
$F'(x)$	+	
F	$-10 \nearrow 0 \nearrow$	$+\infty$

d'où :

$\exists!\, s \in [0, +\infty[\;:\; F(s) = 0$

- $F(1)F(2) = (-5)(14) < 0 \Rightarrow s \in [1, 2]$.

b)

$$\bullet\begin{cases} (*)\ F \in \mathcal{C}^2([1,2]) \\ (*)\ F(1).F(2) < 0 \\ (*)\ \forall x \in [1,2] \quad F'(x) > 0 \ \text{(ne s'annule pas)} \\ (*)\ \forall x \in [1,2] \quad F''(x) = 6x + 8 = 2(3x+4) > 0 \end{cases}$$

- $\inf |F'(x)| = \inf F'(x) = 11 \Rightarrow c = 1$

$\left|\frac{F(1)}{F'(1)}\right| = \left|\frac{-5}{11}\right| = \frac{5}{11} = 0{,}45 < 1$

x	1	2
$F''(x)$	+	
F'	$11 \nearrow$	28

d'où la méthode de Newton est applicable, $\forall x_0 \in [a, b]$.

c) • $F(x_0) = F(\frac{3}{2}) = ?$ 0,5

$$\begin{cases} p_0(x) = 1 \\ p_1(x) = x\,p_0(x) + 4 \\ p_2(x) = x\,p_1(x) + 0 \\ p_3(x) = x\,p_2(x) - 10 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x = \frac{3}{2}} \begin{cases} p_0(3/2) = 1 \\ p_1(3/2) = \frac{11}{2} \\ p_2(\frac{3}{2}) = \frac{33}{4} \\ p_3(\frac{3}{2}) = \frac{19}{8} \end{cases}$$

d'où : $F(\frac{3}{2}) = \frac{19}{8}$

• $F'(x_0) = F'(\frac{3}{2}) = ?$

$F'(x) = 3x^2 + 8x = 0 + x\langle 8 + x\langle 3\rangle\rangle$

$$\begin{cases} p_0(x) = 3 \\ p_1(x) = x\,p_0(x) + 8 \\ p_2(x) = x\,p_1(x) + 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x = \frac{3}{2}} \begin{cases} p_0(3/2) = 3 \\ p_1(3/2) = \frac{25}{2} \\ p_2(3/2) = \frac{75}{4} \end{cases}$$

d'où : $F'(\frac{3}{2}) = \frac{75}{4}$

15 d) $\begin{cases} x_0 \in [1, 2] \\ x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \ n \geq 0 \end{cases}$

• $x_0 = \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} = \frac{206}{150} \simeq 1{,}37333$

25 • $|x_1 - s| \leq \frac{M_2}{2m_1}|x_1 - x_0|^2$ où $m_1 = \inf\limits_{x\in[1,2]} |F'(x)| = 11$.

15 • $M_2 = \sup\limits_{x\in[1,2]} |F''(x)| = 20$, car :

x	1	2
$F^{(3)}$	+	
F''	$14 \nearrow$	20

$F^{(3)}(x) = 6$.

25 • $|x_1 - s| \leq 0{,}0145 \leq 0{,}5.10^{-1}$