FAD'ILA
TcT01
Zinm

UNIVERSITÉ DE BOUMERDES
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT INFORMATIQUE

GI - 3ième année
2005/06

EMD1 de "CALCUL NUMERIQUE"

EXERCICE 1 : (7 points)

Soit le système linéaire $AX = b$, où :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 30 \\ -6 & -27 & -66 \\ 4 & +16 & 37 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 93 \\ -201 \\ 121 \end{pmatrix}$$

1°) Résoudre le système $AX = b$ par la méthode de GAUSS ordinaire.

2°) a) Donner la décomposition LU de A, en justifiant son existence.

b) Déterminer les matrices $G^{(1)}$ et $G^{(2)}$ telles que : $L = [G^{(2)} \cdot G^{(1)}]^{-1}$. Calculer L^{-1} l'inverse de L.

c) En déduire A^{-1} l'inverse de A.

EXERCICE 2 : (4 points)

Soit le système linéaire (S)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -3 \\ -3x_1 - 4x_2 + 14x_3 = 1 \end{cases}$$

1°) Montrer que la matrice des coefficients de ce système (S) est définie positive.

2°) Déterminer, à l'aide de l'algorithme, la matrice de CHolesky associée.

3°) Résoudre, alors, le système (S).

(X1)

Corrigé de L'EMD 1 / GI · 3ième année / Calcul Numérique . 2005/06

Exo1 : (7 points)

1,5 1°) • Tableau de GAUSS

0,5 • (S) ⇔ $AX=b \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+4x_2+10x_3 = 31 \\ x_2+2x_3 = 5 \\ x_3 = 1 \end{cases} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

0,5 2°) a) • On a appliqué la méthode de GAUSS sans permutation où $\forall i \in \{1,2,3\}$ $a_{ii}^{(i)} \neq 0$ [pivots "naturels"], donc : $A=LU$

1 • $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 30 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

1,5 b) • $G^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $G^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $L^{-1} = G^{(2)}G^{(1)} = I\,G^{(1)} = G^{(1)}$

1,5 c) • $U^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 4/3 & 2/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$

0,5 • $A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \begin{pmatrix} 13/9 & 4/3 & 2/3 \\ -14/9 & -1/3 & 2/3 \\ 4/9 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$

Exo2 : (4 points)

1°) (S) ⇔ $AX=b$ où : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 14 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

1 • $|A_1| = 1 > 0$, $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 > 0$ et $|A_3| = |A| = 1 > 0$

d'où A est définie positive

0,25 2°) • A est SDP ⇒ $A = R\,{}^tR$ où R est la matrice de CHOLESKY

1,25 • L'algorithme de CHOLESKY nous donne $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

0,5 3°) • (S) ⇔ $AX=b \Leftrightarrow (R\,{}^tR)X = b \Leftrightarrow \begin{cases} RY = b \\ {}^tRX = Y \end{cases}$

0,5 • $RY=b \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -1 \\ 2y_1+y_2 = -3 \\ -3y_1+2y_2+y_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

0,5 • ${}^tRX = b \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2-3x_3 = -1 \\ x_2+2x_3 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$