Le 17/02/2005

FACULTE DES SCIENCES
Module : M.N.I

EMD1

Exercice1:($5pts$)

1°)Donner une borne supèrieure de l'érreur absolue et estimer l'érreur relative de la préssion $P = \frac{2RT}{V}$ avec $R = 0.082$, $T = 27,102°C$ et $V = 20,20\ell$ si tous les chiffres significatifs sont exacts.

2°)Avec combien de chiffres significatifs exacts faut-il calculer P pour que l'erreur ne dépasse pas $0,1\%$.

Exercice2 :($8pts$)

Soit à résoudre le système linéaire :

$$Ax = b \qquad (1)$$

1°)Rappeler le principe de résolution de (1):

a)Par la méthode LU.

b)par la méthode de $CHOLESKY$.

2°)On considère la matrice A de $M_4(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta & \beta \\ 0 & 1 & \beta & \beta \\ \beta & \beta & 1 & 0 \\ \beta & \beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{où } \beta \in \mathbb{R}$$

a)Donner la décomposition LU de A en précisant les valeurs de β pour lesquelles cette décomposition est possible.

b)Pour quelles valeurs de β la matrice A se décompose-t-elle sous la forme $R.R^t$

c)On prend $\beta = \frac{1}{4}$, calculer la matrice R de $CHOLESKY$ en utilisant l'algorithme correspondant.En déduire l'unique solution x de (1) où $b = (1,0,1,0)^t$

Exercice3 :($7pts$)

On considère le système linéaire

$$Ax = b \qquad (2)$$

$$\text{où} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1°)Soit la matrice J de $JACOBI$ associée à A, Ecrire l'algorithme correspondant.

2°)Soit $x^{(0)} = 0_{\mathbb{R}^3}$, calculer $x^{(1)}$et $x^{(2)}$.

3°)Calculer $\|J\|_\infty$et déterminer le rayon spéctral de J.Conclure.

4°)Déterminer le nombre suffisant k_1 d'itérations à partir du quel

$$\|x^{(k)} - \overline{x}\|_1 \le 10^{-2} \text{ où } \overline{x} \text{ est la solution éxacte de } (2)$$

5°)Calculer la matrice G de $GAUSS-SEIDEL$ associée à A

6°)Calculer $\|G\|_1$et déterminer le nombre d'itérations k_2 à partir du quel:

$$\|x^{(k)} - \overline{x}\|_1 \le 10^{-2}.$$

Comparer les deux méthodes

FACULTÉ DES SCIENCES
Département: MATHEMATIQUES

Module: METHODES NUMÉRIQUES
2004/05

Corrigé de L'EMD 1

Ex01: (5 points)

0,5 1°) a) • $R = 0{,}082 \rightarrow m = -2, n = 2 \rightarrow \Delta(R) \leq 0{,}5 \cdot 10^{m-n+1} = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$

0,5 • $T = 27{,}102 \rightarrow m = 1, n = 5 \rightarrow \Delta(T) \leq 0{,}5 \cdot 10^{m-n+1} = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$

0,5 • $V = 20{,}20 \rightarrow m = 1, n = 4 \rightarrow \Delta(V) \leq 0{,}5 \cdot 10^{m-n+1} = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$

on prend: $\Delta R = \Delta T = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ et $\Delta V = 0{,}5 \cdot 10^{-2} = 10 \cdot \Delta T$

1 b). $\Delta P = 2\Delta\left(\frac{RT}{V}\right) = 2\left[\frac{T}{V}\Delta R + \frac{R}{V}\Delta T + \frac{RT}{V^2}\Delta V\right]$

$\Delta P = \frac{2\Delta T}{V^2}\left[(T+R)V + 10RT\right] \simeq 1{,}4 \cdot 10^{-3}$

0,5 • $\Delta P \leq 0{,}5 \cdot 10^{-2}$ [Dans ce cas: $P = 0{,}22 \pm 0{,}01$]

0,5 c) • $r_P = \frac{\Delta P}{P} = \left[\frac{T+R}{RT} + \frac{10}{V}\right]\Delta T = 6{,}36 \cdot 10^{-3} \simeq 0{,}006$

d'où: $r_P \simeq 0{,}006$.

0,5 2°) • $\begin{cases} \bullet\ E\% = 0{,}1 \Rightarrow r(P) = \frac{E\%}{100} = 10^{-3} \Rightarrow \Delta(P) = P\,r(P) \simeq 0{,}00022 \\ \bullet\ \Delta(P) \leq 0{,}0005 = 0{,}5 \cdot 10^{-3} \end{cases}$

0,5 • $\Delta(P) \leq 0{,}5 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \begin{cases} m - n + 1 = -3 \\ \text{avec } m = -1 \end{cases} \Rightarrow n = 3$ (3 c.s.e)

0,5 • d'où: $P = 0{,}220 \pm 0{,}001$

Ex02: (8 points)

1,5 • 1°) Voir cours.

2°) 1ère disposition:

0,25 • $A^{(1)} = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta & \beta \\ 0 & 1 & \beta & \beta \\ \beta & \beta & 1 & 0 \\ \beta & \beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(1)} \\ L_4^{(1)} \end{matrix}$

0,25 $\sim A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta & \beta \\ 0 & 1 & \beta & \beta \\ 0 & \beta & 1-\beta^2 & -\beta^2 \\ 0 & \beta & -\beta^2 & 1-\beta^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2^{(2)} = L_2^{(1)} \\ L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - \beta L_1^{(1)} \\ L_4^{(2)} = L_4^{(1)} - \beta L_1^{(1)} \end{matrix}$

0,25 • $\sim A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta & \beta \\ 0 & 1 & \beta & \beta \\ 0 & 0 & 1-2\beta^2 & -2\beta^2 \\ 0 & 0 & -2\beta^2 & 1-2\beta^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3^{(3)} = L_3^{(2)} - \beta L_2^{(2)} \\ L_4^{(3)} = L_4^{(2)} - \beta L_2^{(2)} \end{matrix}$

0,25 • Si $1 - 2\beta^2 \neq 0$, i.e: $\left(\beta \neq \frac{1}{\sqrt{2}}\right.$ et $\left.\beta \neq -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

0,25 • $\sim A^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta & \beta \\ 0 & 1 & \beta & \beta \\ 0 & 0 & 1-2\beta^2 & -2\beta^2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-4\beta^2}{1-2\beta^2} \end{pmatrix}$ • $\begin{cases} \text{Si } 1 - 4\beta^2 \neq 0 \\ \text{i.e: } \beta \neq \frac{1}{2} \text{ et } \beta \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$

0,25

ou

2ième disposition:

	x_1	x_2	x_3	x_4	Σ	
0,25 • $A^{(1)} = A$	1 0 β β	0 1 β β	β β 1 0	β β 0 1	$2\beta+1$ $2\beta+1$ $2\beta+1$ $2\beta+1$	
L_p/p	1	0	β	β	$2\beta+1$	
0,25 • $A^{(2)}$		1 β β	β $1-\beta^2$ $-\beta^2$	β $-\beta^2$ $1-\beta^2$	$2\beta+1$ $-2\beta^2+\beta+1$ $-2\beta^2+\beta+1$	
L_p/p		1	β	β	$2\beta+1$	
0,25 + 0,25 • $A^{(3)}$			$1-2\beta^2$ $-2\beta^2$	$-2\beta^2$ $1-2\beta^2$	$-4\beta^2+1$ $-4\beta^2+1$	• Si $1-2\beta^2 \neq 0$ $\Downarrow$
L_p/p			1	$-\frac{2\beta^2}{1-2\beta^2}$	$\frac{1-4\beta^2}{1-2\beta^2}$	
0,25 + 0,25 • $A^{(4)}$				$\frac{1-4\beta^2}{1-2\beta^2}$	$\frac{1-4\beta^2}{1-2\beta^2}$	• Si: $1-4\beta^2 \neq 0$ $\Downarrow$

Si $\begin{cases} 1 - 2\beta^2 \neq 0 \\ 1 - 4\beta^2 \neq 0 \end{cases}$ i.e: $\beta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$, A admet la décomposition LU, où:

0,25 • $U = A^{(4)}$ et • $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots \end{pmatrix}$

b) • A admet la décomposition R^tR si A est symétrique définie positive

(*) $A = {}^tA \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$, d'où A est symétrique pour tout $\beta \in \mathbb{R}$

(*) A est définie positive $\Longleftrightarrow [\forall i = \overline{1,4} \quad u_{ii} > 0]$

$\Longleftrightarrow [1 - 2\beta^2 > 0 \quad$ et $\quad \dfrac{1-4\beta^2}{1-2\beta^2} > 0]$

$\Longleftrightarrow \beta \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

<u>Conclusion</u> : si $\beta \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, $A = R^tR$ où R est la matrice de CHOLESKY

c) $\beta = \frac{1}{4} \Rightarrow$ A admet la décomposition de CHOLESKY

$r_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1$			
$r_{21} = \dfrac{a_{21}}{r_{11}} = 0$	$r_{22} = \sqrt{a_{22} - r_{21}^2} = 1$		
$r_{31} = \dfrac{a_{31}}{r_{11}} = \dfrac{1}{4}$	$r_{32} = \dfrac{a_{32} - r_{31} \cdot r_{21}}{r_{22}} = \dfrac{1}{4}$	$r_{33} = \sqrt{a_{33} - (r_{31}^2 + r_{32}^2)} = \sqrt{\frac{7}{8}}$	
$r_{41} = \dfrac{a_{41}}{r_{11}} = \dfrac{1}{4}$	$r_{42} = \dfrac{a_{42} - r_{41} \cdot r_{21}}{r_{22}} = \dfrac{1}{4}$	$r_{43} = \dfrac{a_{43} - (r_{41} \cdot r_{31} + r_{42} \cdot r_{32})}{r_{33}}$ $r_{43} = -\dfrac{1}{\sqrt{56}}$	$r_{44} = \sqrt{a_{44} - \sum_{j=1}^{3} r_{4j}^2} = \sqrt{\frac{6}{7}}$

d'où

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & \sqrt{7/8} & 0 \\ 1/4 & 1/4 & -1/\sqrt{56} & \sqrt{\frac{6}{7}} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \sqrt{7/8} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{56}} = -\frac{1}{2\sqrt{14}} \end{cases}$$

<u>Résolution</u> : $AX = b \Longleftrightarrow \begin{cases} RY = b \\ {}^tRX = Y \end{cases}$

0,5 • $RY = b \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{7}} \\ -\frac{1}{7}\sqrt{\frac{7}{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3/\sqrt{14} \\ -1/\sqrt{42} \end{pmatrix}$

${}^tR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 & 1/4 & \dots \end{pmatrix} \quad {}^tRX = Y \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 5/6 \\ -1/6 \\ \dots \end{pmatrix}$

<u>EXERCICE 3</u> : (7 points)

1°) $\forall i = \overline{1,3} \quad a_{ii} \neq 0$, on peut donc déterminer la matrice de JACOBI J associée à A, avec : $A = D - E - F$

où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

0,5 • $J = D^{-1}(E + F)$

$J = \begin{pmatrix} 0 & -1/6 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ +2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$, $J = (j_{ij})_{i,j = \overline{1,n}}$ avec : $j_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{si } i \neq j \end{cases}$

0,5 • <u>ALGORITHME de JACOBI</u> :

$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^3 \\ X^{(k+1)} = JX^{(k)} + C, \; k \geq 0 \end{cases}$ où : $C = D^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

i.e. $\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^3 \\ X_1^{(k+1)} = -\frac{1}{6}X_2^{(k)} + \frac{1}{4}X_3^{(k)} + \frac{1}{2} \\ X_2^{(k+1)} = 0 \\ X_3^{(k+1)} = \frac{2}{3}X_1^{(k)} + \frac{1}{3}X_2^{(k)} - \frac{2}{3} \end{cases} \quad (k \geq 0)$

0,25 2°) $X^{(0)} = 0_{\mathbb{R}^2} \rightarrow$ • $X^{(1)} = JX^{(0)} + C = C = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

0,25 $\rightarrow$ • $X^{(2)} = JX^{(1)} + C = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}$

0,25 3°) • $\|J\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq 3} \left(\sum_{j=1}^{3} |j_{ij}| \right) = \max\{\frac{5}{12}, 0, 1\} = 1$

0,5 • $P(\lambda) = \det(J - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 - \frac{1}{6}) = 0 \Longleftrightarrow (\lambda = 0$ ou $\lambda = \frac{1}{\sqrt{6}}$ ou $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{6}})$

$\rho(J) = \max\limits_{\lambda \in S_p(J)} |\lambda| = \max\{0, \frac{1}{\sqrt{6}}\} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

0,5 • $\rho(J) < 1$, donc la méthode de JACOBI converge, $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

0,5 4°) • $\|X^{(k)} - \bar{X}\|_1 \leq \dfrac{(\|J\|_1)^k}{1 - \|J\|_1} \cdot \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_1$

avec : $\|J\|_1 = \max\limits_{1 \leq j \leq 3} \left(\sum_{i=1}^{3} |j_{ij}| \right) = \max\{\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\} = \frac{2}{3}$

$\|X^{(1)} - X^{(0)}\| = \|X^{(1)}\| = \sum^{3} |X^{(1)}| = \frac{7}{\dots}$

- $\|X^{(k)}-X\|_1 \leq 10^{-2}$ dès que : $\dfrac{\|J\|_1}{1-\|J\|_1}\|X^{(1)}-X^{(0)}\|_1 \leq 10^{-2}$

$$\frac{\left(\|J\|_1\right)^{k}}{1-\|J\|_1}\|X^{(1)}-X^{(0)}\|_1 \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^k \leq \frac{2}{7}\cdot 10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2}{3}\right)^k \leq \ln\left(\frac{2}{7}\cdot 10^{-2}\right)$$

$$\Leftrightarrow k \geqslant \frac{\ln\left(\frac{2}{7}\cdot 10^{-2}\right)}{\ln\frac{2}{3}} \quad \left(\ln\frac{2}{3}<0\right)$$

$$\Leftrightarrow k \geqslant 14,4.$$

Il suffit de prendre $k_1 = 15$ (itérations).

5°) $\forall i=\overline{1,3}$ $a_{ii} \neq 0$, on peut donc déterminer la matrice de GAUSS-SEIDEL associé à A, avec : $A=(D-E)-F$

$G = (D-E)^{-1}F$

- $(D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ a & 1/6 & 0 \\ b & c & -2/3 \end{pmatrix}$

$(D-E)^{-1}(D-E) = I \Rightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ 2b - \frac{2}{3} = 0 \\ 6c - \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{3} \\ c = \frac{1}{18} \end{cases} \longrightarrow (D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & \frac{1}{18} & -2/3 \end{pmatrix}$

- $G = \begin{pmatrix} 0 & -1/6 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/9 & 1/6 \end{pmatrix}$

6°) - $\|G\|_1 = \max\limits_{1\leq j\leq 3}\left(\sum\limits_{i=1}^{3}|g_{ij}|\right) = \max\left\{0, \frac{5}{18}, \frac{5}{12}\right\} = \frac{5}{12}$

- $\|G\|_1 < 1$, donc la méthode de GAUSS-SEIDEL converge, $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

Considérons $X^{(0)} = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a :

$$\|X^{(k)} - \overline{X}\|_1 \leq \frac{\|G\|_1}{1-\|G\|_1}\|X^{(1)}-X^{(0)}\|_1$$

avec : $\|X^{(1)}-X^{(0)}\|_1 = \|X^{(1)}\|_1 = \|GX^{(0)}+C\|_1 = \|C\|_1 = \|(D-E)^{-1}b\|_1$

$X^{(1)} = (D-E)^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix} \longrightarrow \|X^{(1)}-X^{(0)}\| = \frac{5}{6}$

- $\|X^{(1)}-X^{(0)}\|_1 \leq 10^{-2}$ dès que $\left(\frac{5}{12}\right)^k \leq 7\cdot 10^{-3}$ ie : $k \geqslant 5,66$

Il suffit de prendre $k_2 = 6$.

- Comme $k_2 << k_1$, la convergence de la méthode de GAUSS-SEIDEL est plus rapide.