

EXERCICE 1:

Soit le système linéaire (S):
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

- 1°) Déterminer, en utilisant la méthode de GAUSS ordinaire
 - a) la solution exacte \bar{X} du système (S).
 - b) une solution approchée X^* , en n'utilisant que des nombres approchés arrondis à 3 chiffres significatifs.
- 2°) En utilisant la norme $\| \cdot \|_\infty$, estimer le résultat en considérant $\bar{X} \approx X^*$.

EXERCICE 2:

Soit la matrice carrée d'ordre 4, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4}$

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} & a_{ii} = (i-1)^2 + 1 \\ \forall i \in \{1, 2, 3\} & a_{i, i+1} = a_{i+1, i} = 1 \\ a_{ij} = 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

En utilisant l'algorithme, déterminer la matrice de Cholesky associée à la matrice A.

EXERCICE 3:

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$, où α est réel

- 1°) Pour quelles valeurs de α :
 - a) A admet-elle la décomposition $LD^T L$?
 - b) A est-elle symétrique définie positive?
 - c) A est-elle à diagonale dominante stricte?

Dans tout ce qui suit, on prend $\lambda = -2$.

- 2°) a) Vérifier que L existe. Calculer L^{-1} et en déduire A^{-1}
b) Déterminer, alors, la solution du système $AX = d$
où: $d = {}^t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & & 2 \end{pmatrix}$

3°) On considère le système $AX = b$ où: $b = {}^t (0 \ 1 \ 0)$

- a) La méthode de JACOBI $\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^3 \\ X^{(k+1)} = JX^{(k)} + C', k \geq 0. \end{cases}$ converge-t-elle
 $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$?

- b) Vérifier de deux façons différentes que la méthode de GAUSS-SEIDEL $\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^3 \\ X^{(k+1)} = GX^{(k)} + C, k \geq 0 \end{cases}$

converge, $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

c) Écrire l'algorithme correspondant.

d) En déduire l'unique solution du système $AX = b$.

4°) Déduire des questions précédentes, la solution du système $A^2 X = b$, sans calculer la matrice A^2 .

— 0 —