Université de Boumerdès. Faculté des sciences. département de mathématiques.
TCT. Deuxième année . Module: M.N.I. Année 2006/2007.
EMD 1 (Durée 1 h 30 mn)

Exercice 1. (4 points) Soit T, la période des petites oscillations du pendule qui est donnée par $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ où ℓ est la longueur du pendule et g la pesanteur. Supposons que les mesures faites sur T et ℓ ont donné les résultats suivants:

$$T = T^* \pm \Delta T = 1,936 \pm 0,004 \ s \quad \text{et} \quad \ell = \ell^* \pm \Delta\ell = 92,95 \pm 0,10 \ cm.$$

Calculer la pesanteur g en arrondissant au dernier chiffre significatif exact. Donner l'erreur relative sur g en pourcentage.

Exercice 2 . (8 points) Soit à résoudre le système $Ax = b$ (I) où

$$A = \begin{pmatrix} 14 & -3 & 0 & \alpha \\ -3 & 10 & 3 & -3\alpha \\ 0 & 3 & 10 & 0 \\ \alpha & -3\alpha & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R} \ \text{et} \ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1) Décomposer A en LU et résoudre le système (I) par cette méthode.
Préciser l'intérêt de cette méthode dans la résolution de ce système.
2) Montrer que A admet la décomposition LDL^t.
3) Pour quelles valeurs de α, la matrice A est définie positive?
4) En déduire sa décomposition de Cholesky: $A = RR^t$.
5) On pose $\alpha = \frac{4}{3}$. Déterminer la matrice R en utilisant l'algorithme de Cholesky.

Exercice 3. (8 points) Soit à résoudre le système $Ax = b$ (II) où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & 2 & -\frac{2}{3} \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I) On considère la méthode itérative de Gauss-Seidel associée au système (II) définie par

$$X^{(k+1)} = GX^{(k)} + C, \ X^{(0)} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Déterminer G et C.
b) Montrer que cette méthode converge $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.
c) Calculer $X^{(2)}$ à partir de $X^{(0)} = 0 \in \mathbb{R}^3$.
d) Montrer que $x_3^{(k)} = 0, \ \forall k \in \mathbb{N}$; en déduire la solution exacte $\bar{X}$ du système (II).

II) On considère la méthode itérative de Jacobi associée au système (II) définie par

$$X^{(k+1)} = JX^{(k)} + C', \ X^{(0)} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Déterminer J et C'.
b) i) Donner le polynôme caractéristique $P_J(\lambda)$ associé à la matrice J,
-ii) Calculer les valeurs $P_J(-1)$, $P_J(-\frac{1}{2})$, $P_J(\frac{1}{2})$ et $P_J(1)$.
iii) En déduire que cette méthode converge $\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

(1)

Corrigé .

Exercice 1. On a :

1

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Longleftrightarrow g = \frac{4\pi^2\ell}{T^2} \Longrightarrow \Delta g = \left|\frac{\partial g}{\partial \pi}\right|\Delta\pi + \left|\frac{\partial g}{\partial \ell}\right|\Delta\ell + \left|\frac{\partial g}{\partial T}\right|\Delta T = \frac{8\pi\ell}{T^2}\Delta\pi + \frac{4\pi^2}{T^2}\Delta\ell + \frac{8\pi^2\ell}{T^3}\Delta T.$$

015

$$g^* = \frac{4\pi^2\ell}{T^2} = \frac{4(3.14)^2(92.95)}{(1.936)^2} = 978,\ 043\,059\,7\ \ cm/s^2$$

1

$$\Delta g = \frac{8(3.14)(92.95)}{(1.936)^2}(0.0016) + \frac{4(3.14)^2}{(1.936)^2}(0.10) + \frac{8(3.14)^2(92.95)}{(1.936)^3}(0.002) = 4,069\,706\,82 \le 0,5\times 10^1$$

015

Nombre de c.s.e. $m = 2$, $m - n + 1 = 1 \Longrightarrow n = m = 2$, d'où

$$g = 980 \pm 2\times 0.5\times 10^1 = 980 \pm 10\ \ cm/s^2.$$

015

$$\frac{\Delta g}{g} = 2\frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{\Delta\ell}{\ell} + 2\frac{\Delta T}{T} = 2\frac{0.0016}{3.14} + \frac{0.10}{92.95} + 2\frac{0.002}{1.936} = 0.004161\,071\,212 \simeq 0.4\%$$

015

Exercice 2

1) Décomposer A en LU

1

$$A = A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & \alpha \\ -3 & 10 & 3 & -3\alpha \\ 0 & 3 & 10 & 0 \\ \alpha & -3\alpha & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \longrightarrow L_2 + 3L_1 \\ L_4 \longrightarrow L_4 - \alpha L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\alpha^2 \end{pmatrix} = A^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\alpha^2 \end{pmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 - 3L_2 \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\alpha^2 \end{pmatrix} = A^{(3)}$$

0125

Si $2 - \alpha^2 \neq 0$, alors $A = LU$ avec

015

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\alpha^2 \end{pmatrix}$$ 0125

Résolution du système (I) par LU.

$$Ax = b \quad (I) \Longleftrightarrow \begin{cases} Ly = b & \text{(par la descente)} \\ Ux = y & \text{(par la remontée)} \end{cases}$$

015

$$Ly = b \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

0,5

$$Ux = y \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

0,5

Intérêt de la méthode LU : La résolution du système (I) par la méthode LU revient à résoudre deux systèmes triangulaires qui sont plus faciles qu'un système général.

0,5

2) Décomposition LDL^t. Comme A admet la décomposition LU si $2-\alpha^2 \neq 0$ et comme elle est symétrique , alors elle admet une décomposition LDL^t si $\alpha \notin \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

On a

0,5

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = DL^t$$

d'où

$$A = LDL^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0,5

3) A est définie positive? Les éléments de la matrice diagonale D dans la décomposition $A = LDL^t$ sont tous strictement positifs si $2-\alpha^2 > 0$, c'est à dire si $-\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}$. Donc si $-\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}$, alors A est définie positive.

4) Donner sa décomposition de Cholesky. Dans ce cas

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2-\alpha^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2-\alpha^2} \end{pmatrix} =$$

$D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}}$.

Et alors alors A s'écrit

1

$$A = LDL^t = LD^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} L^t = \left(LD^{\frac{1}{2}}\right) \left(D^{\frac{1}{2}} L^t\right) = \left(LD^{\frac{1}{2}}\right) \left(LD^{\frac{1}{2}}\right)^t = RR^t$$

où

$$R = LD^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2-\alpha^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \sqrt{2-\alpha^2} \end{pmatrix}$$

0,25

5) On pose $\alpha = \frac{4}{3} \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$. Algorithme de Cholesky:

3

$$A = RR^t \iff \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & \frac{4}{3} \\ -3 & 10 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 10 & 0 \\ \frac{4}{3} & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & r_{41} \\ 0 & r_{22} & r_{32} & r_{42} \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{43} \\ 0 & 0 & 0 & r_{44} \end{pmatrix}$$

Première colonne de R.

$$a_{11} = 1 = r_{11}; \quad a_{21} = -3 = r_{21}; \quad a_{31} = 0 = r_{31}; \quad a_{41} = \frac{4}{3} = r_{41}.$$

Deuxième colonne de R.

$$\begin{aligned} a_{22} &= 10 = r_{21}^2 + r_{22}^2 \Longrightarrow r_{22} = \sqrt{10 - r_{21}^2} = \sqrt{10 - 9} = 1, \\ a_{32} &= 3 = r_{31}r_{21} + r_{32}r_{22} \Longrightarrow r_{32} = \frac{3 - r_{31}r_{21}}{r_{22}} = \frac{3-0}{1} = 3, \\ a_{42} &= r_{41}r_{21} + r_{42}r_{22} \Longrightarrow r_{42} = \frac{-4 - r_{41}r_{21}}{r_{22}} = \frac{-4 - \frac{4}{3}(-3)}{1} = 0 \end{aligned}$$

1,75

Troisième colonne de R.

$$\begin{aligned} a_{33} &= 10 = r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2 \Longrightarrow r_{33} = \sqrt{10 - (r_{31}^2 + r_{32}^2)} = \sqrt{10 - (0+9)} = 1, \\ a_{43} &= 0 = r_{41}r_{31} + r_{42}r_{32} + r_{43}r_{33} \Longrightarrow r_{43} = \frac{-r_{41}r_{31} - r_{42}r_{32}}{r_{33}} = -\frac{4}{3}0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Quatrième colonne de R.

$$a_{44} = 2 = r_{41}^2 + r_{42}^2 + r_{43}^2 - r_{44}^2 \Longrightarrow r_{44} = \sqrt{2 - (r_{41}^2 + r_{42}^2 + r_{43}^2)} = \sqrt{2 - \left\{\frac{4}{3}\right\}^2 - 0 - 0} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

D'où

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

Exercice 3.

I) On considère la méthode itérative de Gauss-Seidel associée au système (II) définie par

$$X^{(k+1)} = GX^{(k)} + C, \quad X^{(0)} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Déterminer G et C. G existe car les $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, 3$.

$$G = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{16} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{5}{24} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

0,5 0,5