UMBB, Faculté des sciences, Dép.de Math. Le 18/09/2008

ANA_NUM_IF. $2^{ème}$ année TCT.

Durée: 02h.

# RATTRAPAGE

*Remarque* : le sujet est **RECTO_VERSO**

Tout résultat non justifié ne sera pas pris en considération.

## Exercice 1 : ( 6 pts)

Soit le système $AX = b$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1) Ecrire le processus itératif de Jacobi $X^{(k+1)} = JX^{(k)} + C$.
2) Calculer $\|J\|_1$ et $\|J\|_\infty$. Que peut-on déduire pour la convergence, pour tout $X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$?
3) Pour $X^{(0)} = 0$, calculer les itérées $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ puis estimer l'erreur $\|\bar{X} - X^{(2)}\|$ où $\bar{X}$ désigne la solution exacte de $AX = b$ ( préciser quelle norme vous utiliser et pourquoi? ), $X^{(2)}$ est-elle une bonne approximation de $\bar{X}$ ?

## Exercice 2 : ( 7 pts)

On considère trois fonctions $f$, $g$, $h$, suffisamment dérivables dans l'intervalle $I = [-1, 1]$.

1) Soit la table

| $x_i$ | $-1$ | $\frac{-1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | $1$ | $-1$ | $1$ |

Calculer le polynôme d'interpolation $P(x)$ de $f$ aux points $-1$, $-1/2$, $1/2$ sous la forme de Lagrange et l'ordonner suivant les puissances croissantes de $x$.

2) On considère la table

| $x_i$ | $\frac{-1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $g(x_i)$ | $-1$ | $1$ | $-1$ |

Calculer le polynôme d'interpolation $Q(x)$ de $g$ aux points $-1/2$, $1/2$, $1$ sous la forme de Newton et l'ordonner suivant les puissances croissantes de $x$. (donner la table des différences divisées ).

Tourner la page

3) On considère la table

| $x_i$ | $-1$ | $\frac{-1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x_i)$ | $1$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $-1$ |

Montrer, sans le calculer explicitement, que le polynôme

$$R(x) = \frac{1}{2}((x+1)Q(x) - (x-1)P(x))$$

est le polynôme d'interpolation de $h$ aux points $-1,\ -1/2,\ 0,\ 1/2,\ 1$

4) $a$) Montrer que $R$ est aussi le polynôme d'interpolation de $h$ aux points $-1,\ -1/2,\ 1/2,\ 1$

$b$) Ecrire l'erreur d'interpolation en ces quatre points et en déduire une majoration de l'erreur d'interpolation $E(x) = h(x) - R(x)$.
( On suppose que $|h^{(k)}(x)| \leq 1\ \ \forall k \in \mathbb{N}$ ).

**Exercice 3 : ( 7 pts).**

On condidère la matrice $A$ d'ordre 3 définie par $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$

1) En posant $x = \alpha - \lambda$, montrer que le polynôme caractéristique $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = Q(x)$ s'écrit

$$Q(x) = x^3 - \frac{21}{4}x + 2$$

2) On condidère l'équation

$$Q(x) = 0,\quad x \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right] \qquad (1)$$

$a$) Montrer que (1) est équivalente à l'équation

$$x = \frac{8}{21 - 4x^2} = \varphi(x),\ \ x \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right] \quad (2)$$

$b$) Montrer que $\varphi$ et l'intervalle $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ réalise les hypothèses du théorème du point fixe; que peut-on en déduire?.

$c$) On considère le processus itératif

$$x_{n+1} = \varphi(x_n),\quad x_0 = \frac{1}{2} \qquad (3)$$

et on note $s \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ la solution de l'équation (1). Calculer $x_2$ ainsi qu'une estimation de l'erreur $|s - x_2|$; en déduire un encadrement de la racine $s$.

UMBB, Faculté des sciences, Dép.de Math. Le 18/09/2008
ANA_NUM_IF 2ème année TCT

## Correction du Rattrapage

**Exercice 1: (6 pts)** Soit le système $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

1) $\forall i\ a_{ii} \neq 0$, on peut donc déterminer la matrice de jacobi $J$

On décompose la matrice $A$ en $A = D - E - F$.
Soit

$$\begin{cases} X^{(k+1)} = JX^{(k)} + C, & X^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}\right)^t \\ X^{(0)} \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

le processus de Jacobi associé au système $AX = b$
La matrice de Jacobi $J = D^{-1}(E+F) = (J_{ij})_{i,j}$ est défine par:

$$J_{ij} = \begin{cases} \dfrac{-a_{ij}}{a_{ii}} \text{ si } i \neq j \\ 0 \text{ si } i = j \end{cases} \qquad \text{Donc } J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 0,5$$

Le vecteur itéré $C = D^{-1}b$ est tel que $C_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$. Donc $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 0,5

Le processus itératif s'écrit

$$X^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} X^{(k)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

2) $J$ étant symétrique, alors

$$\|J\|_1 = \|J\|_\infty = Max(0 + \left|\tfrac{-1}{2}\right| + \tfrac{1}{2}, \left|\tfrac{-1}{2}\right| + 0 + 0, \left|\tfrac{1}{2}\right| + 0 + 0) = 1 \nless 1 \quad 1$$

On ne peut rien dire sur la convergence de processus (c-a-d pas de conclusion). 0,5

3) Pour $X^{(0)} = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow X^{(1)} = JX^{(0)} + C = C \Rightarrow X^{(2)} = JX^{(1)} + C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 0,5

$L$'estimation d'erreur $\|X^{(2)} - \bar{X}\|_2$ :

$\|J\|_2 = \sqrt{\rho(J^t.J)} = \sqrt{\rho(J^2)} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, donc la méthode de Jacobi converge,

$\forall X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$. 0,5

En effet

$$J^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \ \det(J^2 - \lambda I) = \lambda\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2$$ 0,5

d'où $\rho(J^2) = Max(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \|J\|_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ 0,5

On peut aussi remarquer que $J$ étant symétrique, alors

$$\|J\|_2 = \sqrt{\rho(J^t.J)} = \sqrt{\rho(J^2)} = \rho(J)$$

$\det(J - \lambda I) = -\lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda, \ \rho(J) = Max(0, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

Comme $\|J\|_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ On a l'estimation de l'erreur en norme $\|.\|_2$ : 0,5

$$\|X^{(2)} - \bar{X}\|_2 \leq \frac{\|J\|_2}{1 - \|J\|_2} \|X^{(2)} - X^{(1)}\|_2$$

$$X^{(2)} - X^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|X^{(2)} - X^{(1)}\|_2 = \sqrt{(-\tfrac{1}{2})^2 + 0} = \frac{1}{2}.$$

Donc 0,5

$$\|X^{(2)} - \bar{X}\|_2 \leq \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{1}{2} = 1.2071$$

$X^{(2)}$ est une mauvaise approximation de $\bar{X}$ car l'erreur est très grande. 0,5

**Exercice 2: (7 pts)**

1) Pour la table

| $x_i$ | $-1$ | $\frac{-1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | $1$ | $-1$ | $1$ |

Les polynômes élémentaires de Lagrange, aux points d'interpolation, s'écrivent

$$L_0 = \frac{(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})}{(-1+\frac{1}{2})(-1-\frac{1}{2})} = \frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

$$L_1 = \frac{(x+1)(x-\frac{1}{2})}{(-\frac{1}{2}+1)(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})} = -2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

$$L_2 = \frac{(x+1)(x+\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

0,75

Le polynôme d'interpolation, sous la forme de Lagrange, s'écrit

$$\begin{aligned} P(x) &= L_0 - L_1 + L_2 \\ &= \frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) + 2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right) \\ &= -1 + 2x + 4x^2 \end{aligned}$$

0,75

2) Pour la table

| $x_i$ | $\frac{-1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $g(x_i)$ | $-1$ | $1$ | $-1$ |

On a la table des difféences divisées

| $x_i$ | $g(x_i)$ | $1^{er} D.D.$ | $2^{éme} D.D.$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{-1}{2}$ | -1 | | |
| | | 2 | |
| $\frac{1}{2}$ | 1 | | $\frac{-4-2}{1+\frac{1}{2}} = -4$ |
| | | $-4$ | |
| $1$ | $-1$ | | |

0,75

Le polynôme d'interpolation, sous la forme de Newton, s'écrit

$$\begin{aligned} Q(x) &= -1 + 2\left(x+\frac{1}{2}\right) - 4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) \\ &= 1 + 2x - 4x^2 \end{aligned}$$

0,75

3) On a, par définition des polynômes d'interpolation $P$, $Q$ :

$$d^\circ(P) \leq 2 \ \ et \ \ d^\circ(Q) \leq 2$$

Soit

$$R(x) = \frac{1}{2}((x+1)Q(x) - (x-1)P(x))$$

Par définition de $R$ on a $d^\circ(R) \leq \max\left(d^\circ(P)+1,\ d^\circ(Q)+1\right) \leq 3$

0,5

et on a

$$\begin{aligned}
R(-1) &= \tfrac{1}{2}((-1+1)Q(-1) - (-1-1)P(-1)) \\
&= \tfrac{2P(-1)}{2} = f(-1) = 1 = h(-1) \\
R\left(-\tfrac{1}{2}\right) &= \tfrac{1}{2}\left(\left(-\tfrac{1}{2}+1\right)Q\left(-\tfrac{1}{2}\right) - \left(-\tfrac{1}{2}-1\right)P\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\left(-\tfrac{1}{2}+1\right)(-1) - \left(-\tfrac{1}{2}-1\right)(-1)\right) = -1 = h\left(-\tfrac{1}{2}\right) \\
R(0) &= \tfrac{1}{2}((0+1)Q(0) - (0-1)P(0)) = \tfrac{Q(0)+P(0)}{2} = \tfrac{-1+1}{2} = 0 = h(0) \\
R\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \tfrac{1}{2}\left(\left(\tfrac{1}{2}+1\right)Q\left(\tfrac{1}{2}\right) - \left(\tfrac{1}{2}-1\right)P\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\left(\tfrac{1}{2}+1\right)(1) - \left(\tfrac{1}{2}-1\right)(1)\right) = 1 = h\left(\tfrac{1}{2}\right) \\
R(1) &= \tfrac{1}{2}((1+1)Q(1) - (1-1)P(1)) \\
&= \tfrac{2Q(1)}{2} = g(1) = -1 = h(1)
\end{aligned}$$

1,25

d'où, $R$ est le polynôme d'interpolation de $h$ aux points $-1,\ -1/2,\ 0,\ 1/2,\ 1$.

4) a) Pour dire que $R$ est le polynôme d'interpolation de $h$ aux points $-1,\ -1/2,\ 1/2,\ 1$ il suffit de vérifier que $R$ coïncide avec $h$ aux points $-1,\ -1/2,\ 1/2,\ 1$ (c-a-d $R(x_i) = h(x_i)$ pour $x_i = -1,\ -1/2,\ 1/2,\ 1$) et que $d°(R) \le n = 3$ (on a 4 points d'interpolation), or ces conditions sont vérifiées dans la question précédente. 0,5

b) On a l'expression de l'erreur d'interpolation

$$\begin{aligned}
|E(x)| = |h(x) - R(x)| &= \left|(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)\frac{h^{(4)}(\xi)}{4!}\right| \\
&= \left|\left(x^2-\frac{1}{4}\right)(x^2-1)\frac{h^{(4)}(\xi)}{24}\right|,\quad \xi \in\ ]-1,1[
\end{aligned}$$

0,5

Calculons $Sup_{[-1,1]}|v(x)|$ où $v(x) = \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)(x^2-1)$

$v'(x) = 2x(x^2-1) + 2x\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}x(8x^2-5)$

Le tableau de variations de $v$

| $x$ | $-1$ | | $-\sqrt{\frac{5}{8}}$ | | $0$ | | $+\sqrt{\frac{5}{8}}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $v$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{9}{64}$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{4}$ | $\searrow$ | $-\frac{9}{64}$ | $\nearrow$ | $0$ |

0,75

Ce qui donne

$$Sup_{[-1,1]}|v(x)| = \tfrac{1}{4}$$

Puisque $|h^{(4)}(x)| \le 1$ on a

$$|E(x)| \le \tfrac{1}{4} * \tfrac{1}{24} = \tfrac{1}{96}$$

0,5

**Exercice 3: (7 pts)**

On condidère la matrice $A$ d'ordre 3 définie par $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$

1) En posant $x = \alpha - \lambda$
Le polynôme caractéristique de $A$ est définie par

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & \alpha-\lambda & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & \alpha-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & x \end{vmatrix} = x^3 - \frac{21}{4}x + 2 = Q(x)$$

1

2) $a$) Pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ on a

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - \frac{21}{4}x + 2 = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 21x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(21 - 4x^2) = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{21 - 4x^2} = \varphi(x)$$

0,5

$b$) Montrons que les hypothèses du Théorème du point fixe sont vérifiés

$b_1$) Montrons que $\varphi$ est contractante dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

$\varphi(x) = \frac{8}{21-4x^2}$; $\varphi'(x) = 64\frac{x}{(4x^2-21)^2}$, $\varphi''(x) = 192\frac{4x^2+7}{(21-4x^2)^3}$

On a $\varphi'(x) > 0$ et $\varphi''(x) < 0, \forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, car

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{\sqrt{21}}{2}$ | | $-\frac{\sqrt{7}}{2}$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{\sqrt{7}}{2}$ | | $\frac{\sqrt{21}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $21-4x^2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $4x^2+7$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\varphi''(x)$ | | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ | | $-$ | |
| $\varphi'(x)$ | | | | | | | $\varphi'(0)$ | | $\varphi'(\frac{1}{2})$ | | | | | | |

1

Autrement dit $\varphi'$ est positive décroissante dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Donc

$$k = Max_{[0, \frac{1}{2}]}|\varphi'(x)| = \varphi'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{25} = 0.08 < 1$$

0,1

donc $\varphi$ est contractante dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

$b_2$) Montrons que $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est stable par $\varphi$ .

Comme $\varphi'$ est positive dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc $\varphi$ est croissante dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

Donc $\varphi\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[\varphi(0), \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \left[\frac{8}{21}, \frac{2}{5}\right] = \left[0.38095, 0.4\right]$

0,75

d'où $\varphi\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$,

donc $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est stable par $\varphi$.

b₃) Comme $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $\varphi$ satisfont aux hypothèses du théorème du point fixe,

On a les conclusions:

$(C_1)$ $\exists! s \in \left[a, b\right]$ telque $s = \varphi(s)$.

0,5

$(C_2)$ $\forall\, x_0 \in \left[a, b\right]$, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers $s$.

$(C_3)$ On a les estimations d'erreur suivantes:

1) $|x_n - s| \le \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$.

2) $|x_{n+1} - s| \le \frac{k}{1-k}|x_{n+1} - x_n|$.

c) Pour $x_0 = \dfrac{1}{2}$, $x_1 = \varphi(x_0) = \frac{2}{5}$, $x_2 = \frac{200}{509} = 0.39293$ 0,5 + 0,5

On a l'estimation d'erreur

$|x_2 - s| \le \dfrac{k}{1-k}|x_2 - x_1| \le \dfrac{\frac{2}{25}}{1 - \frac{2}{25}}\left|\frac{200}{509} - \frac{2}{5}\right| = \dfrac{36}{58535} = 6{,}150166567 \times 10^{-4} \le 50.10^{-4}$

Alors $|x_2 - s| \le 0.5.10^{-2}$

1

$$\begin{cases} m - n + 1 = -2 \\ m = -1 \text{ car } x_2 = 0.39293 = 3.10^{-1} + 9.10^{-2} + \ldots \end{cases}$$

$$\Rightarrow n = 2 \text{ c.s.e.}$$

Après l'arrondissement:

$$s \simeq 0.39 \pm 10^{-2} \quad \text{car } 2 < 5$$

D'où l'encadrement

$$0.38 = 0.39 - 10^{-2} \le s \le 0.39 + 10^{-2} = 0.40$$

0,5