Examen de Math 6 (Méthodes numériques)

Département : Département de Technologie, Université Ammar Télidji de Laghouat.
Section : $2^{ème}$ ST, semestre 4.
Chargé du module : Dr. M. Bentobache.
Date : Le 03/06/2013.

EXERCICE 01 (9pts) :

Considérons l'équation (1) donnée par : $f(x) = 4e^{\frac{x}{4}} - 6 = 0$.

1- Montrer que l'equation (1) admet une solution α unique dans l'intervalle [0,4].(1pt)

2- Trouver le nombre d'itérations nécessaires pour trouver la solution approchée de l'équation (1) à 10^{-1} près avec la méthode de dichotomie sur l'intervalle [1.5,2].(1pt)

3- Trouver la solution approchée de l'équation (1) à 10^{-1} près avec la méthode de dichotomie sur l'intervalle [1.5,2].(1pt)

4- Soit $\phi(x) = x - \frac{e^{\frac{x}{4}}}{16} + \frac{3}{32}$. Démontrer que α est un point fixe de la fonction ϕ.(1pt)

5- Démonter que $\forall x \in [0, 4], \phi(x) \in [0, 4]$.(1pt)

6- Calculer le maximum de la fonction $g(x) = |\phi'(x)|$ sur l'interval [0,4] ; puis déduire que le processus itératif :

$$\begin{cases} x_0 \in [0, 4], \\ x_{k+1} = \phi(x_k), \quad k > 0, \end{cases}$$

converge vers α.(1pt)

7- En prenant $x_0 = 1.5$, majorer l'expression $|\alpha - x_n|, n \geq 0$, puis déduire le nombre d'itérations nécessaires pour trouver une solution approchée de l'équation (1) à 10^{-1} près.(1pt)

8- En prenant $x_0 = 1.5$, trouver les approximations x_1 et x_2 avec la méthode du point fixe.(1pt)

9- En partant de l'approximation $x_0 = 1.5$, appliquer la méthode de Newton pour trouver la solution approchée de l'équation (1) à 10^{-1} près.(1pt)

Dans cet exercice, travailler avec 4 chiffres après la virgule et utiliser les valeurs suivantes si c'est nécessaire :

$f(0) = -2; f(4) = 4.8731; f(1.5) = -0.1800; f(1.75) = 0.1953; f(1.625) = 0.0047.$

$\phi(0) = 0.0313; \phi(4) = 3.9239; \phi(1.5) = 1.5028.$

EXERCICE 02 (11pts) :

On considère le système (S) défini par :

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 36, \\ 3x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 48, \\ 3x_1 + 4x_2 + 11x_3 = 51. \end{cases}$$

1- Ecrire le système (S) sous forme $Ax = b$ et démontrer qu'il admet une solution unique. (1pt)

2- Résoudre le système (S) par la méthode de Gauss, puis déduire le déterminant de A. (3.5pts)

3- Peut-on faire la décomposition LU de la matrice A du système (S) ? Si oui justifiez votre réponse ; puis résoudre le système (S) par la méthode de la décomposition LU. (3pts)

4- Démontrer que l'on peut appliquer la méthode de Cholesky au système (S). (0.5pt)

5- Résoudre le système (S) par la méthode de Cholesky. (3pts)