Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Que dire de deux sous-ensembles A et B de E tels que $A \cup B = A \cap B$?

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soient A, B, C trois ensembles.
A quoi équivaut l'égalité $A \cup B = A \cap C$?

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soient A, B, C trois ensembles.
Montrer que $\begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases} \Rightarrow B \subset C$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soient A, B, C trois ensembles.
Montrer que $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Pour toutes parties A et B d'un ensemble E, on pose $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
$A \,\Delta\, B$ est appelé *différence symétrique* de A et de B.

1. Montrer qu'une définition équivalente est : $A \,\Delta\, B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.
2. Vérifier que $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$, $\quad \overline{A \,\Delta\, B} = \bar{A} \,\Delta\, B = A \,\Delta\, \bar{B}$, et $\quad \bar{A} \,\Delta\, \bar{B} = A \,\Delta\, B$.
3. Calculer $A \,\Delta\, \emptyset$, $\quad A \,\Delta\, A \quad$ et $\quad A \,\Delta\, E$.

On désigne par A, B et C trois parties de E.

4. Montrer que $A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$.
5. Vérifier également que $A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) = (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C$.
6. Quel signifie alors $A_1 \,\Delta\, A_2 \,\Delta\, \cdots \,\Delta\, A_n$, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n parties de E, avec $n \geq 2$?

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Les ensembles A et B sont égaux.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

L'égalité équivaut à la double inclusion $B \subset A \subset C$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

On se donnera un élément x de B et on se demandera s'il appartient ou non à l'ensemble A.
NB : Il y a une deuxième méthode qui n'utilise pas d'éléments de B.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Commencer par exemple par "factoriser" B dans la première intersection.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

1. 2. 3. Ce sont des vérifications immédiates.
4. Utiliser la distributivité de l'intersection.
5. Montrer que $A \Delta (B \Delta C) = (A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C})$.
   Ensuite, évaluer $(A \Delta B) \Delta C$, mais si possible sans répéter des calculs analogues.
6. C'est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à exactement un nombre impair d'ensembles A_k. La démonstration s'effectue par récurrence sur le nombre n des A_k.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On a toujours les inclusions $A \cap B \subset A$ et $A \subset A \cup B$.

L'hypothèse de l'énoncé implique donc $A = A \cap B = A \cup B$.

De même, par symétrie, $B = A \cap B = A \cup B$. On en déduit $A = B$ (réciproque immédiate).

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Dans le sens $\Leftarrow$: si $B \subset A \subset C$ alors $A \cup B = A = A \cap C$.

Réciproquement, on suppose que $A \cup B = A \cap C$.

On a toujours $B \subset A \cup B$ et $A \cap C \subset A$. L'hypothèse implique donc $B \subset A$.

De même, les implications $A \subset A \cup B$ et $A \cap C \subset C$ impliquent ici $A \subset C$.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Soit x un élément de B. On doit montrer que x est dans C.

– Si x est dans A, alors il est dans $A \cap B$ donc dans $A \cap C$ donc dans C.
– Si x n'est pas dans A, il est tout de même dans $A \cup B$ donc dans $A \cup C$.
  Ainsi x est dans $A \cup C$ mais pas dans A. Il est donc dans C.

Conclusion : on a l'inclusion $B \subset C$.

Remarque : on peut aussi utiliser les inclusions

– $B = B \cap (A \cup B) \subset B \cap (A \cup C)$ et
– $B \cap (A \cup C) = (B \cap A) \cup (B \cap C) \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$ puis
– $(A \cap C) \cup (B \cap C) = C \cap (A \cup B) \subset C$.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Soit $X = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$.

On "factorise" B dans la première intersection : $(A \cup B) \cap (B \cup C) = B \cup (A \cap C)$.

Ainsi : $X = [B \cup (A \cap C)] \cap (C \cup A) = [B \cap (C \cup A)] \cup [(A \cap C) \cap (C \cup A)]$.

Mais $(A \cap C) \cap (C \cup A)$ se réduit à $(A \cap C)$ car $(A \cap C) \subset (A \cup C)$. On en déduit :

$$\begin{aligned} X &= [B \cap (C \cup A)] \cup (A \cap C) = [(B \cap C) \cup (B \cap A)] \cup (A \cap C) \\ &= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) \end{aligned}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

1. On a les égalités :
$$\begin{aligned} A \,\Delta\, B &= (A\cup B)\setminus(A\cap B) = (A\cup B)\cap(\overline{A\cap B}) \\ &= (A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B}) = (A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\end{aligned}$$
2. On a $A\,\Delta\,B = B\,\Delta\,A$ car la définition est symétrique par rapport en A et B. On a :
$$\begin{aligned} \overline{A}\,\Delta\,B &= (\overline{A}\cap\overline{B})\cup(\overline{\overline{A}}\cap B) = (\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cap B) = (\overline{A\cup B})\cup(A\cap B) \\ &= \overline{(A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})} = \overline{A\,\Delta\,B}\end{aligned}$$
Par symétrie, on en déduit : $A\,\Delta\,\overline{B} = \overline{B}\,\Delta\,A = \overline{B\,\Delta\,A} = \overline{A\,\Delta\,B}$.
On peut alors écrire : $\overline{A}\,\Delta\,\overline{B} = \overline{A\,\Delta\,\overline{B}} = \overline{\overline{A\,\Delta\,B}} = A\,\Delta\,B$.
3. – $A\,\Delta\,\emptyset = (A\cup\emptyset)\setminus(A\cap\emptyset) = A\setminus\emptyset = A$.
– $A\,\Delta\,A = (A\cup A)\setminus(A\cap A) = A\setminus A = \emptyset$.
– $A\,\Delta\,E = (A\cup E)\setminus(A\cap E) = E\setminus A = \overline{A}$.
4. On a les égalités :
$$\begin{aligned} (A\cap B)\,\Delta\,(A\cap C) &= [(A\cap B)\cup(A\cap C)]\setminus[(A\cap B)\cap(A\cap C)] \\ &= [A\cap(B\cup C)]\setminus[A\cap(B\cap C)] \\ &= A\cap[(B\cup C)\setminus(B\cap C)] = A\cap(B\,\Delta\,C)\end{aligned}$$
5. Tout d'abord, par définition :
$A\,\Delta\,(B\,\Delta\,C) = X\cup Y$, avec $X = \overline{A}\cap(B\,\Delta\,C)$ et $Y = A\cap(\overline{B\,\Delta\,C})$.
Or $X = \overline{A}\cap\big[(\overline{B}\cap C)\cup(B\cap\overline{C})\big] = (\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})$.
D'autre part (changer $\overline{A}$ en A et B en $\overline{B}$ dans le calcul précédent) :
$Y = A\cap(\overline{B}\,\Delta\,C) = (A\cap B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})$.
Ainsi : $A\,\Delta\,(B\,\Delta\,C) = (A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})$.
Enfin on note que $(A\,\Delta\,B)\,\Delta\,C = C\,\Delta\,(A\,\Delta\,B) = C\,\Delta\,(B\,\Delta\,A)$.
Pour obtenir $(A\,\Delta\,B)\,\Delta\,C$ il suffit d'échanger A et C dans l'expression de $A\,\Delta\,(B\,\Delta\,C)$.
On voit que cette expression n'est pas modifiée dans cet échange.
Conclusion : pour toutes parties A, B, C de E, on a $A\,\Delta\,(B\,\Delta\,C) = (A\,\Delta\,B)\,\Delta\,C$.
Remarque : l'ensemble $A\,\Delta\,(B\,\Delta\,C) = (A\,\Delta\,B)\,\Delta\,C$ est donc formé des éléments de E qui sont dans l'un et dans l'un seulement des trois ensembles A, B, C, ou bien qui sont simultanément dans ces trois ensembles.
6. Les propriétés $A\,\Delta\,B = B\,\Delta\,A$ (commutativité) et $A\,\Delta\,(B\,\Delta\,C) = (A\,\Delta\,B)\,\Delta\,C$ (associativité) montrent que la notation $A_1\,\Delta\,A_2\,\Delta\,\cdots\,\Delta\,A_n$ a un sens (et désigne toujours la même partie de E) quelque soit l'ordre dans lequel on effectue les calculs.
Plus précisément $A_1\,\Delta\,A_2\,\Delta\,\cdots\,\Delta\,A_n$ désigne l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à exactement un nombre impair d'ensembles A_k.
Cette propriété est en effet vraie si $n = 2$ (car $A_1\,\Delta\,A_2$ est l'ensemble des éléments de E qui sont dans l'un et dans l'un seulement des deux ensembles A_1 et A_2).
C'est vrai aussi si $n = 3$, comme le montre la question précédente.
Plus généralement, si la propriété est vraie au rang n ($n \geq 2$) elle l'est au rang $n+1$ grâce à l'égalité $A_1\,\Delta\,A_2\,\Delta\,\cdots\,\Delta\,A_n\,\Delta\,A_{n+1} = (A_1\,\Delta\,A_2\,\Delta\,\cdots\,\Delta\,A_n)\,\Delta\,A_{n+1}$.