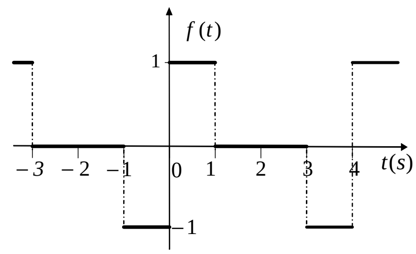
Université A. Mira de Béjaia. Année: 2012/2013.
Faculté de Technologie. Module: Physique 3.
Département $2^{éme}$ Année ST. **EXAMEN DE REMPLACEMENT** Durée: 02 Heures.

Exercice 1 Série de Fourier. $\boxed{\text{4 Points}}$

Soit la fonction périodique $f(t)$ ci-contre.



1. Quelle est la période T de cette fonction.

2. Cette fonction est-t-elle *paire* ou *impaire* ?

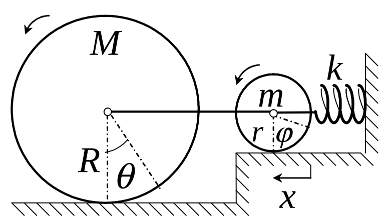
3. Trouver les coefficients de Fourier a_0, a_n, et b_n de la fonction.

Rappel: *La série de Fourier d'une fonction périodique $f(t)$ est*:
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\tfrac{2\pi n}{T}t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\tfrac{2\pi n}{T}t).$$

Exercice 2 Système non amorti. $\boxed{\text{5 Points}}$

Deux disques de rayons R et r et de masses M et m, sont reliés par une tige rigide de masse négligeable. Le petit disque est relié en son centre à un ressort de raideur k.

Les deux disques roulent *sans glissement* sur le sol.



1. Trouver l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle U du système en termes de la variable x.

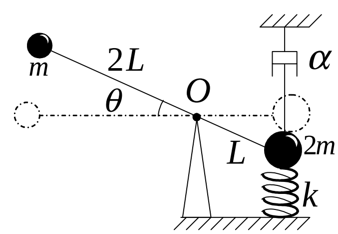
2. Déduire l'équation du mouvement et la pulsation propre ω_0, soit avec l'équation de Lagrange, soit avec l'équation de conservation de l'énergie totale. (Utilisez la méthode que vous préférez !)

Rappel: Les moments d'inertie des disques sont: $I_1 = \frac{1}{2}mr^2$, $I_2 = \frac{1}{2}MR^2$.

Indication: Trouver une relation entre x, r, φ, R, θ.

Exercice 3 Système amorti. $\boxed{\text{8 Points}}$

Une tige de masse négligeable et de longueur totale $3L$ porte à ses extrémités deux masses ponctuelles m et $2m$. La masse $2m$ est reliée à un ressort de raideur k et à un amortisseur de coefficient de frottement α. La tige peut tourner librement autour du point *fixe* O dans le plan vertical. À l'équilibre, la tige était verticale et le ressort *non déformé*.



1. Trouver l'énergie potentielle U, l'énergie cinétique T, ainsi que la fonction de dissipation $\mathcal{D}$ pour $\theta \ll 1$.

2. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit $\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{6m}\dot{\theta} + \frac{k}{6m}\theta = 0$.

3. Sachant que α=**12**N.s/m, m=**1**kg, k=**6**N/m : trouver la nature du mouvement.

4. Trouver le coefficient α pour lequel l'amplitude est divisée par **3** après **2** oscillations complètes.

Rappels: Pour $\theta \ll 1$: $\sin\theta \approx \theta$.

L'équation de Lagrange du système amorti est $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}}$.

Questions de cours. $\boxed{\text{3 Points}}$

1. Lorsque le facteur de qualité est $Q >$ **0,5**: on dit que l'amortissement est *faible* ou *important* ?

2. Le facteur de qualité Q est relié à la pulsation propre ω_0 et l'amortissement λ par $\frac{\omega_0}{2\lambda}$ ou $\frac{2\lambda}{\omega_0}$?

3. À la pulsation de résonance de phase $\Omega = \omega_0$, la puissance moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ fournie par l'excitation est *maximale* ou *minimale* ?

Exercice 1

1. La période de la fonction est $\boxed{T=\mathbf{4s}.}$ 1 **2**. La fonction est impaire. 0,5

2. $a_0 = 0$ 0,5 $a_n = 0$ 0,5 (Car la fonction est impaire.)

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\,\mathrm{d}t \;(0{,}5) = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\,\mathrm{d}t \quad \left\{f\ impaire \rightarrow \frac{4}{T}\int_0^{T/2}\ est\ correcte\ aussi\right\}$$

$$= \frac{2}{4}\left[\int_{-1}^{0} -1.\sin\frac{2\pi\mathbf{n}\mathbf{t}}{4}\mathrm{d}t + \int_0^1 1.\sin\frac{2\pi\mathbf{n}\mathbf{t}}{4}\mathrm{d}t + \int_1^3 0.\sin\frac{2\pi\mathbf{n}\mathbf{t}}{4}\mathrm{d}t\right] \;(0{,}5)$$

$$= \frac{2}{\pi\mathbf{n}}\left(1-\cos\frac{\pi\mathbf{n}}{2}\right). \;(0{,}5)$$

Donc, $f(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi\mathbf{n}}\left(1-\cos\frac{\pi\mathbf{n}}{2}\right)\sin\frac{\pi\mathbf{n}\mathbf{t}}{2}$. $\left\{\text{Pour } \mathbf{n} \text{ impaire } \cos\frac{\pi\mathbf{n}}{2}=0, \text{ pour } \mathbf{n} \text{ paire } \cos\frac{\pi\mathbf{2k}}{2}=\cos\pi\mathbf{k}=(-1)^{\mathbf{k}}\right\}$

Exercice 2

1. Puisque les deux disques roulent sans glissement on a $\boxed{x = r\varphi = R\theta.}$ 0,5 (Donc, $\dot{x} = r\dot{\varphi} = R\dot{\theta}$.)

$$T = T_{M(translation)} + T_{M(rotation)} + T_{m(translation)} + T_{m(rotation)}$$

$$= \boxed{\tfrac{1}{2}M\,\dot{x}^2}\;(0{,}5) + \boxed{\tfrac{1}{4}MR^2\,\dot{\theta}^2}\;(0{,}5) + \boxed{\tfrac{1}{2}m\,\dot{x}^2}\;(0{,}5) + \boxed{\tfrac{1}{4}mr^2\,\dot{\varphi}^2}\;(0{,}5) = \frac{3}{4}(M+m)\,\dot{x}^2.$$

$$U = U_m = \boxed{\tfrac{1}{2}kx^2.}\;(0{,}5)$$

2. Avec l'équation de Lagrange. Le Lagrangien est $\mathcal{L} = T - U = \frac{3}{4}(M+m)\,\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=0}\;(0{,}5) \Longrightarrow \boxed{\ddot{x}+\frac{2k}{3(M+m)}x=0.}\;(1)\quad \boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{2k}{3(M+m)}}}\;(0{,}5)$$

Avec l'équation de conservation de l'énergie totale. $E = T + U = \frac{3}{4}(M+m)\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=0}\;(0{,}5) \Longrightarrow \boxed{\ddot{x}+\frac{2k}{3(M+m)}x=0.}\;(1)\quad \boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{2k}{3(M+m)}}}\;(0{,}5)$$

Exercice 3

1. $T = T_{2m} + T_m = \boxed{\frac{1}{2}2m(L\dot{\theta})^2}\;(0{,}5) + \boxed{\frac{1}{2}m(2L\dot{\theta})^2}\;(0{,}5) = 3mL^2\,\dot{\theta}^2$.

$U = U_k + U_m + U_{2m} \approx \boxed{\frac{1}{2}k\left(L\sin\theta\right)^2}\;(0{,}5) + \boxed{mg2L\sin\theta - 2mgL\sin\theta}\;(0{,}5) \approx \frac{1}{2}kL^2\theta^2$.

$\boxed{\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha L^2\,\dot{\theta}^2.}$ 0,5

2. Le Lagrangien est: $\mathcal{L} = T - U = 3mL^2\,\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kL^2\theta^2$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{\theta}} \Longrightarrow \boxed{6mL^2\ddot{\theta} + kL^2\theta = -\alpha L^2\dot{\theta}}\;(0{,}5) \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{6m}\dot{\theta} + \frac{k}{6m}\theta = 0.$$

3. L'équation est de la forme: $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$: avec $\boxed{\lambda = \frac{\alpha}{12m},\ \omega_0^2 = \frac{k}{6m}.}$ 0,5

A.N: $\boxed{\lambda^2 - \omega_0^2}$ 0,5 $=\boxed{\mathbf{0.}}$ 0,5 Le mouvement est donc en régime $\boxed{\textbf{critique.}}$ 0,5

4. La présence d'oscillations indique que le mouvement est devenu pseudo-périodique, d'amplitude $Ae^{-\lambda t}$:

$$\boxed{Ae^{-\lambda(t+2T)} = \tfrac{1}{3}Ae^{-\lambda t}.}\;(0{,}5) \Longrightarrow \boxed{2\lambda T = \ln 3}\;(0{,}5) \Longrightarrow \boxed{\frac{4\pi\lambda}{\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}} = \ln 3}\;(0{,}5)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{\omega_0\ln 3}{\sqrt{(4\pi)^2+(\ln 3)^2}}}\;(0{,}5)\quad \textbf{A.N}:\ \boxed{\lambda \approx \mathbf{0{,}09}\ \mathrm{s}^{-1}.}\;(0{,}5) \Longrightarrow \alpha = 12m\lambda \approx \boxed{\mathbf{1{,}08}\ \mathrm{N.s/m}.}\;(0{,}5)$$

Questions de cours

1. L'amortissement est *faible*. 1

2. $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$. 1

3. La puisssance moyenne est *maximale*. 1