Vibrations et Ondes

Partie 1 (Vibrations)

Chapitre I

Généralités et Mathématiques des Oscillations

EXERCICES DE RÉVISIONS: VIBRATIONS-CHAPITRE I

Relations Trigonométriques

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\cos\alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right]$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\sin\alpha = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right]$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\right]$

$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$

Nombres Complexes ($j^2 = -1$)

$\underline{\mathcal{Z}} = x + jy$

$\underline{\mathcal{Z}}^* = x - jy$

$|\underline{\mathcal{Z}}| = \sqrt{\underline{\mathcal{Z}}\,\underline{\mathcal{Z}}^*} = \sqrt{x^2 + y^2} = A$

$\underline{\mathcal{Z}}_1\underline{\mathcal{Z}}_2 = A_1 e^{j\phi_1} A_2 e^{j\phi_2} = A_1 A_2 e^{j(\phi_1 + \phi_1)}$

$x = A\cos\phi \quad , \quad y = A\sin\phi$

$\tan\phi = \frac{y}{x} = \frac{\mathrm{Im}(\underline{\mathcal{Z}})}{\mathrm{Re}(\underline{\mathcal{Z}})}$

$\cos\phi + j\sin\phi = e^{j\phi}$

$\frac{\underline{\mathcal{Z}}_1}{\underline{\mathcal{Z}}_2} = \frac{A_1 e^{j\phi_1}}{A_2 e^{j\phi_2}} = \frac{A_1}{A_2} e^{j(\phi_1 - \phi_2)}$

$\underline{\mathcal{Z}} = A\cos\phi + jA\cos\phi$

$\underline{\mathcal{Z}}^* = A\cos\phi - jA\cos\phi$

$\underline{\mathcal{Z}} = Ae^{j\phi} \quad , \quad \underline{\mathcal{Z}}^* = Ae^{-j\phi}$

$|\underline{\mathcal{Z}}_1\underline{\mathcal{Z}}_2| = |\underline{\mathcal{Z}}_1|\,|\underline{\mathcal{Z}}_2|$ $\qquad \left|\frac{\underline{\mathcal{Z}}_1}{\underline{\mathcal{Z}}_2}\right| = \frac{|\underline{\mathcal{Z}}_1|}{|\underline{\mathcal{Z}}_2|}$

Dérivées

$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$

$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx} \quad , \quad \frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{\partial f}{\partial g}\frac{dg}{dx}$

Intégrales

$\int \cos x\ dx = \sin x + C$

$\int x^n\ dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$

$\int e^{ax}\ dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

$\int \sin x\ dx = -\cos x + C$

$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

$\int fg\ dx = fG - \int \frac{df}{dx}G\ dx \quad (G = \int g\ dx)$

Séries de Fourier

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \qquad (\omega = 2\pi/T)$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\ dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\ dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\ dt$$

1) Périodes, Fréquences, Pulsations, Phases, et Parité

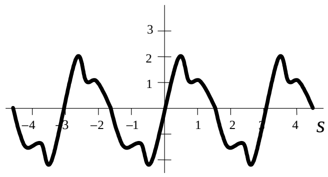
1.1 Trouver parmi les fonctions ci-dessous celles qui ne sont pas périodiques.

1.2 Déterminer la période, la fréquence, et la pulsation des fonctions qui sont périodiques.

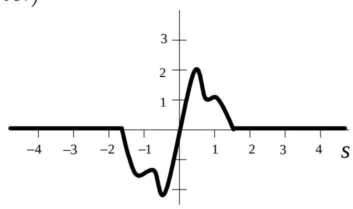
1.3 Les fonctions en (c) et (d) sont $A\cos(\omega t+\phi)$. Trouver leur amplitude A et leur phase ϕ.

1.4 Trouver la parité de toutes les fonctions. (La parité veut dire *paire* ou *impaire*.)

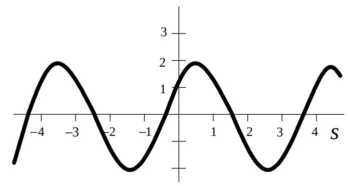
(*On suppose que les graphes (n) et (o) représentent une seul période d'un mouvement période, à vous de les prolonger pour découvrir leur parité.*)



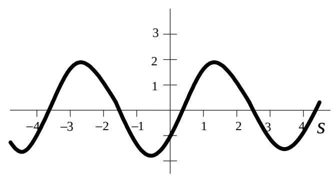
(a)



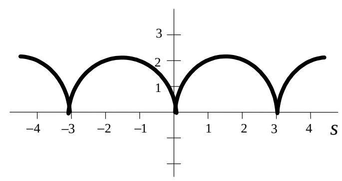
(b)



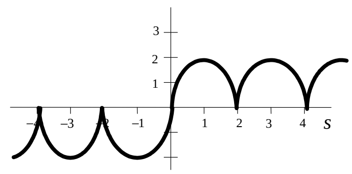
(c)



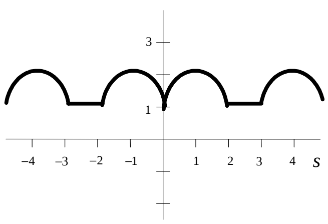
(d)



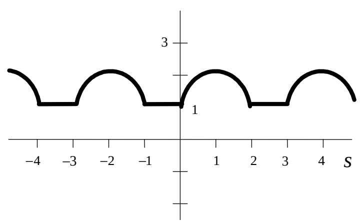
(e)



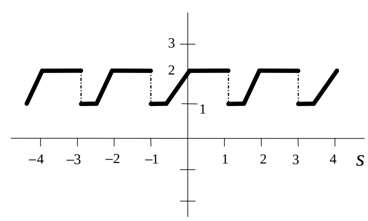
(f)



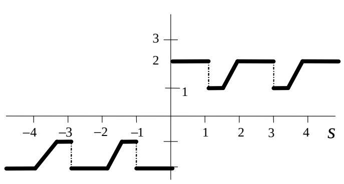
(g)



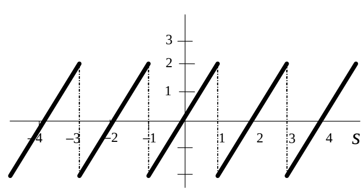
(h)



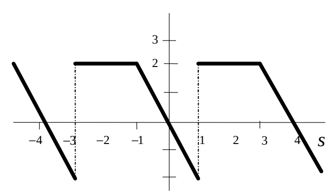
(i)



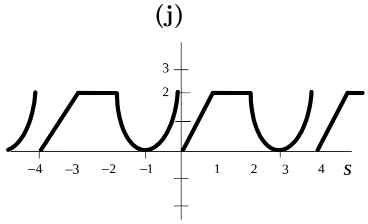
(j)



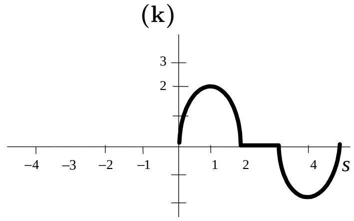
(k)



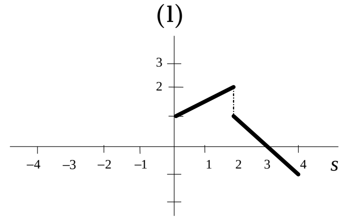
(l)



(m)



(n)



(o)

Solution:

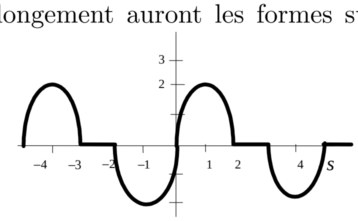
1.1 Les fonctions qui ne sont pas périodiques sont: (b), (f), (g), (j).

1.2 La période, la fréquence, et la pulsation de chacune des fonctions périodiques sont:
(e), (h): T= 3s, f =0,33Hz, $\omega = \frac{2\pi}{3}$rad/s
(c), (d), (l), (m), (o): T= 4s, f = 0,25Hz, $\omega = \frac{\pi}{2}$rad/s
(i), (k): T= 2s, f = 0,5Hz, $\omega = \pi$rad/s
(n): T= 5s, f = 0,2Hz, $\omega = \frac{2\pi}{5}$rad/s.

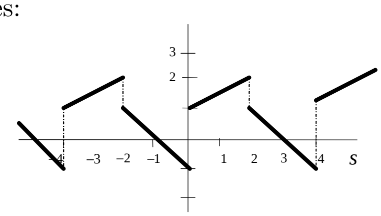
1.3 $A\cos(\omega t+\phi)$. Pour avoir l'amplitude A il suffit de repérer le maximum du graphe.
Pour avoir la phase ϕ il suffit d'utiliser la valeur de f en $t = 0$:

(c): $A = 2$. Pour $t = 0$: A $\cos(0+\phi)= 1 \Longrightarrow 2\cos\phi = 1 \Longrightarrow \cos\phi = \frac{1}{2} \Longrightarrow \phi = \frac{\pi}{3}$.
(d): $A = 2$. Pour $t = 0$: A $\cos(0+\phi)=-1 \Longrightarrow 2\cos\phi =-1 \Longrightarrow \cos\phi =-\frac{1}{2} \Longrightarrow \phi = \frac{2\pi}{3}$.

1.4 Les parités de chacune des fonctions sont les suivantes:
(a): impaire, (b): impaire, (c): ni paire ni impaire, (d): ni paire ni impaire, (e): paire, (f): impaire, (g): paire, (h): ni paire ni impaire, (i): ni paire ni impaire, (j): impaire, (k): impaire, (l): ni paire ni impaire, (m): ni paire ni impaire. Si les graphes (n) et (o) représentent chacun une seule période de mouvements périodiques, leur prolongement auront les formes suivantes:



(n)



(o)

On voit alors que (n) est impaire alors que (o) n'est ni paire ni impaire.

2) Nombres Complexes et Superposition de Mouvements

2.1 Écrire les nombres complexes suivants sous la forme exponentielle: $Ae^{j\phi}$.

(i) $\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}$. (ii) $2 - 2j$. (iii) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right)\left(1 + \sqrt{3}j\right)$. (iv) $\frac{1 + j}{-\sqrt{3} + j}$.

Solution:

(i) $A = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right| = 1$ et $\tan\phi = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \phi = 30° = \frac{\pi}{6}$. Donc, $\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} = e^{j\frac{\pi}{6}}$.

(ii) $2-2j = 2\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$.

(iii) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} = e^{-j\frac{\pi}{6}} \quad ; \quad 1 + \sqrt{3}j = 2e^{j\frac{\pi}{3}}\right] \Longrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right)\left(1 + \sqrt{3}j\right) = e^{-j\frac{\pi}{6}}.2e^{j\frac{\pi}{3}} = 2e^{j\frac{\pi}{6}}$.

(iv) $\left[(1 + j) = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad \left(-\sqrt{3} + j\right) = 2e^{-j\frac{\pi}{6}}\right] \Longrightarrow \frac{1+j}{-\sqrt{3} + j} = \frac{\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}}{2e^{-j\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{5\pi}{6}}$.

2.2 Écrire les sommes suivantes sous la forme d'une seule exponentielle: $Ae^{j\phi}$.

(i) $0,707e^{j\frac{\pi}{3}} + 1,366e^{j\frac{5\pi}{4}}$, (ii) $2,733e^{j\frac{\pi}{6}} + e^{j\frac{\pi}{2}}$, (iii) $\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}} + 3e^{j\frac{4\pi}{3}}$, (iv) $1,035e^{j\frac{\pi}{2}} - 0,6$.

Solution:

(i) $A = \left|0{,}707e^{j\frac{\pi}{3}} + 1{,}366e^{j\frac{5\pi}{4}}\right| = \sqrt{\left(0{,}707e^{j\frac{\pi}{3}} + 1{,}366e^{j\frac{5\pi}{4}}\right)\left(0{,}707e^{-j\frac{\pi}{3}} + 1{,}366e^{-j\frac{5\pi}{4}}\right)}$

$$\approx \sqrt{0{,}5 + 1{,}866 + 0{,}707\times1{,}366\left[e^{j\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{4}\right)} + e^{-j\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{4}\right)}\right]} = \sqrt{2{,}366 + 2\times0{,}966\ \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{4}\right)} \approx \mathbf{0{,}707}.$$

Puisque $0{,}707e^{j\frac{\pi}{3}} + 1{,}366e^{j\frac{5\pi}{4}} = \left[0{,}707\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1{,}366\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right] + j\left[0{,}707\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1{,}366\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$, alors

$\tan\phi = \frac{\mathrm{Im}\left(0{,}707e^{j\frac{\pi}{3}} + 1{,}366e^{j\frac{5\pi}{4}}\right)}{\mathrm{Re}\left(0{,}707e^{j\frac{\pi}{3}} + 1{,}366e^{j\frac{5\pi}{4}}\right)} = \frac{0{,}707\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1{,}366\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{0{,}707\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1{,}366\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)} \approx 0{,}577 \Longrightarrow \phi \approx 30° = \frac{\pi}{6}$.

Donc $0{,}707e^{j\frac{\pi}{3}} + 1{,}366e^{j\frac{5\pi}{4}} \approx 0{,}707e^{j\frac{\pi}{6}}$.

(ii) $2{,}733e^{j\frac{\pi}{6}}+e^{j\frac{\pi}{2}} \approx 3{,}347e^{j\frac{\pi}{4}}$. (iii) $\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}}+3e^{j\frac{4\pi}{3}} = \sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{2}}$. (iv) $1{,}035e^{j\frac{\pi}{2}}-0{,}6\approx 1{,}196e^{-j\frac{\pi}{3}}$.

2.3 Trouver, en utilisant la représentation complexe, l'amplitude complexe associée aux superpositions ci-dessous. Écrire l'expression réelle du mouvement résultant et déduire sa pulsation, son amplitude, et sa phase dans chaque cas.

(i) $\sqrt{3}\cos(3t+\pi)+\cos\left(3t+\dfrac{\pi}{2}\right)$. (ii) $2\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)+3,864\cos\left(t+\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

(iii) $(\sqrt{3}+1)\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)+2\sqrt{2}\sin\left(2t+\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

(iv) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(5t+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{2}{\sqrt{2}}\sin\left(5t+\dfrac{\pi}{4}\right)+4\cos\left(5t+\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

Solution:

(i)
$$\begin{array}{ccl} \sqrt{3}\cos(3t+\pi)+\cos(3t+\frac{\pi}{2}) & \longrightarrow & \sqrt{3}e^{j(3t+\pi)}+e^{j(3t+\frac{\pi}{2})} \\ & & =\left(\sqrt{3}e^{j\pi}+e^{j\frac{\pi}{2}}\right)e^{j3t} \\ & & = \ 2e^{-j\frac{\pi}{6}}\ e^{j3t} \\ 2\cos(3t-\frac{\pi}{6}) & \longleftarrow & = \ 2e^{j\left(3t-\frac{\pi}{6}\right)}. \end{array}$$

L'amplitude complexe du mouvement est $2e^{-j\frac{\pi}{6}}$. L'expression réelle du mouvement résultant est $2\cos(3t-\frac{\pi}{6})$. Sa pulsation est $\omega=3$rad/s. Son amplitude est $A=2$. Sa phase est $\phi=-\frac{\pi}{6}$.

(ii)
$$\begin{array}{ccl} 2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+3{,}864\cos\left(t+\frac{7\pi}{6}\right) & \longrightarrow & 2e^{j\left(t+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)}+3{,}864e^{j(t+\frac{7\pi}{6})} \\ 3{,}864\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right) & \longleftarrow & \approx\ 3{,}864e^{j\frac{\pi}{3}}e^{jt} \end{array}$$

L'amplitude complexe du mouvement est $3{,}864e^{j\frac{\pi}{3}}$. L'expression réelle du mouvement résultant est $3{,}864\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$. Sa pulsation est $\omega=1$rad/s. Son amplitude est $A\approx 3{,}864$. Sa phase est $\phi\approx\frac{\pi}{3}$.

(iii)
$$\begin{array}{ccl} (\sqrt{3}+1)\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)+2\sqrt{2}\sin\left(2t+\frac{5\pi}{4}\right) & \longrightarrow & (\sqrt{3}+1)e^{j\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)}+2\sqrt{2}e^{j(2t+\frac{5\pi}{4})} \\ 0{,}732\sin\left(2t-\frac{\pi}{6}\right) & \longleftarrow & \approx\ 0{,}732\ e^{-j\frac{\pi}{6}}e^{j2t} \end{array}$$

L'amplitude complexe du mouvement est $0{,}732\ e^{-j\frac{\pi}{6}}$. L'expression réelle du mouvement résultant est $0{,}732\sin\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)$. Sa pulsation est $\omega=2$rad/s. Son amplitude est $A\approx 0{,}732$. Sa phase est $\phi=-\frac{\pi}{6}$.

(iv)
$$\begin{array}{ccl} \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(5t+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{2}{\sqrt{2}}\sin\left(5t+\frac{\pi}{4}\right)+4\cos\left(5t+\frac{4\pi}{3}\right) & \longrightarrow & \frac{2e^{j\left(5t+\frac{\pi}{6}\right)}}{\sqrt{3}}+\frac{2e^{j\left(5t-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}}+4e^{j(5t+\frac{4\pi}{3})} \\ 3{,}887\cos\left(5t+\frac{\pi}{2}\right) & \longleftarrow & \approx\ 3{,}887e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j5t} \end{array}$$

L'amplitude complexe du mouvement est $3{,}887\ e^{j\frac{\pi}{2}}$. L'expression réelle du mouvement résultant est $3{,}887\cos\left(5t+\frac{\pi}{2}\right)$. Sa pulsation est $\omega=5$rad/s. Son amplitude est $A\approx 3{,}887$. Sa phase est $\phi=\frac{\pi}{2}$.

2.4 Trouver, en utilisant la méthode trigonométrique, le mouvement résultant dans chaque cas. Préciser pour quels cas on obtient le phénomène de battement.

(i) $2\cos\left(8t+\dfrac{\pi}{2}\right)+2\cos(2t+\pi)$. (ii) $3\sin\left(6,5t+\dfrac{\pi}{3}\right)+3\sin\left(3,5t+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(iii) $4\sin\left(5,5t+\dfrac{\pi}{4}\right)+4\cos\left(4,5t+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Solution:

Le phénomène de battement n'apparaît clairement que lorsque la pulsation de l'enveloppe $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$ est très faible devant la pulsation de la composante plus rapide $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$.

(i) $2\cos\left(8t+\frac{\pi}{2}\right)+2\cos(2t+\pi)=4\cos\left(3t-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(5t+\frac{3\pi}{4}\right)$ (**pas** de battement)

(ii) $3\sin\left(6,5t+\frac{\pi}{3}\right)+3\sin\left(3,5t+\frac{\pi}{4}\right)=6\cos\left(1,5t+\frac{\pi}{24}\right)\sin\left(5t+\frac{7\pi}{24}\right)$ (battement **peu** visible)

(iii) $4\sin\left(5,5t+\frac{\pi}{4}\right)+4\cos\left(4,5t+\frac{\pi}{6}\right)=8\cos\left(0,5t+\frac{\pi}{24}\right)\cos\left(5t+\frac{5\pi}{24}\right)$ (battement **très** visible)

2.5 Trouver parmi les superpositions de mouvements sinusoïdaux ci-dessous celles qui donnent un mouvement périodique; préciser leur périodes résultantes.

(i) $2\cos(2,5t+\pi)+6\cos\left(8t+\frac{\pi}{2}\right)$. (ii) $5\sin\left(3\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+3\sin\left(7\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$.

(iii) $9\sin\left(\sqrt{2}t+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)$. (iv) $\sin\left(\sqrt{3}t+\frac{\pi}{5}\right)+4\cos\left(\sqrt{12}\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$.

(v) $\sin\left(\sqrt{3}t+\frac{\pi}{3}\right)+4\sin\left(\sqrt{15}t+\frac{4\pi}{5}\right)$. (vi) $7\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{2}\right)+6\cos\left(5t+\frac{3\pi}{4}\right)$.

Solution:

(i) $\frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{T}_2}=\frac{2\pi/2.5}{2\pi/8}=\frac{16}{5}$ rationnel$\Longrightarrow$mouvement résultant périodique de période $\mathrm{T}=5\mathrm{T}_1=16\mathrm{T}_2=4\pi$s.

(ii) $\frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{T}_2}=\frac{2\pi/3\pi}{2\pi/7\pi}=\frac{7}{3}$ rationnel$\Longrightarrow$mouvement résultant périodique de période $\mathrm{T}=3\mathrm{T}_1=7\mathrm{T}_2=2$s.

(iii) $\frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{T}_2}=\frac{2\pi/\sqrt{2}}{2\pi/1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ non rationnel$\Longrightarrow$mouvement résultant non périodique.

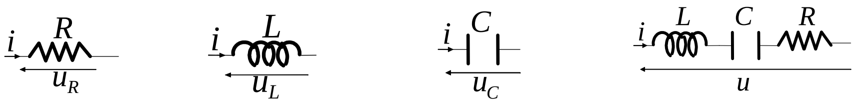
(iv) $\frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{T}_2}=\frac{2\pi/\sqrt{3}}{2\pi/\sqrt{12}\pi}=2\pi$ non rationnel$\Longrightarrow$mouvement résultant non périodique.

(v) $\frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{T}_2}=\frac{2\pi/\sqrt{3}}{2\pi/\sqrt{15}}=\sqrt{5}$ non rationnel$\Longrightarrow$mouvement résultant non périodique.

(vi) $\frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{T}_2}=\frac{2\pi/\pi}{2\pi/5}=\frac{5}{\pi}$ non rationnel$\Longrightarrow$mouvement résultant non périodique.

3) Circuits Électriques en Représentation Complexe

3.1 Soit les circuits ci-dessous, où $i(t)=I_0\sin\omega t$.



(i) (ii) (iii) (iv)

a) L'impédance complexe $\underline{Z}$ d'un circuit est définie par l'équation $\boxed{\underline{u}=\underline{Z}\;\underline{i}.}$
En utilisant la représentation complexe du courant i, trouver pour chacun des circuits précédents l'impédance complexe $\underline{Z}$.

b) Retrouver l'impédance complexe $\underline{Z}$ équivalente au dérnier circuit directement en remarquant le branchement en série des impédances

$$\boxed{\textit{Rappel: } u_R=\mathrm{R}i. \quad u_L=\mathrm{L}\frac{di}{dt}. \quad u_C=\frac{q}{\mathrm{C}}=\frac{1}{\mathrm{C}}\int idt.}$$

Solution:

a) Utilisons la représentation complexe :

$$\boxed{\begin{array}{c} i(t)=I_0\sin\omega t\longrightarrow\underline{i}(t)=I_0e^{j\omega t}. \\ u(t)\longrightarrow\underline{u}(t). \end{array}}$$

(i) $u_R=\mathrm{R}i \longrightarrow \underline{u}_R=\mathrm{R}\underline{i}\Longrightarrow\underline{Z}_R=\mathrm{R}$.

(ii) $u_L=\mathrm{L}\frac{di}{dt} \longrightarrow \underline{u}_L=\mathrm{L}\frac{d\underline{i}}{dt}=j\mathrm{L}\omega\underline{i}\Longrightarrow\underline{Z}_L=j\mathrm{L}\omega$.

(iii) $u_C=\frac{1}{\mathrm{C}}\int idt \longrightarrow \underline{u}_C=\frac{1}{\mathrm{C}}\int\underline{i}dt=\frac{1}{j\mathrm{C}\omega}\underline{i}\Longrightarrow\underline{Z}_C=\frac{1}{j\mathrm{C}\omega}$.

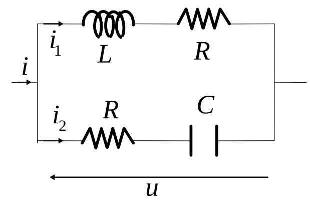
(iv) $u=u_L+u_C+u_R=\mathrm{L}\frac{di}{dt}+\frac{1}{\mathrm{C}}\int idt+\mathrm{R}i\longrightarrow\underline{u}=\underline{u}_L+\underline{u}_C+\underline{u}_R=\mathrm{L}\frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\mathrm{C}}\int\underline{i}dt+\mathrm{R}\underline{i}$

$$\Longrightarrow\underline{u}=(j\mathrm{L}\omega+\frac{1}{j\mathrm{C}\omega}+\mathrm{R})\underline{i}$$

$$\Longrightarrow\underline{Z}=j\mathrm{L}\omega+\frac{1}{j\mathrm{C}\omega}+\mathrm{R}=\frac{1-\mathrm{LC}\omega^2+j\mathrm{RC}\omega}{j\mathrm{C}\omega}$$

b) Cette impédance peut être trouvée directement en remarquant que les impédances $\underline{Z}_L$, $\underline{Z}_C$, et $\underline{Z}_R$ sont en série et par conséquent $\underline{Z}=\underline{Z}_L+\underline{Z}_C+\underline{Z}_R=j\mathrm{L}\omega+\frac{1}{j\mathrm{C}\omega}+\mathrm{R}=\frac{1-\mathrm{LC}\omega^2+j\mathrm{RC}\omega}{j\mathrm{C}\omega}$.

3.2 Soit le circuit ci-contre, où $i(t) = I_0 \cos \omega t$.
(i) **Trouver en utilisant les courants l'impédance complexe** $\underline{Z}$ **équivalente au circuit.**
(ii) **Retrouver l'impédance complexe équivalente** $\underline{Z}$ **directement sans passer par les courants.**
(iii) **Vérifier que pour** $LC\omega^2 = 1$ **l'impédance complexe** $\underline{Z}$ **est réelle**.
(iv) **Trouver une relation entre** R, L, **et** C **pour laquelle l'impédance complexe** $\underline{Z}$ **est aussi réelle.**



Solution:
(i) Utilisons la représentation complexe suivante:

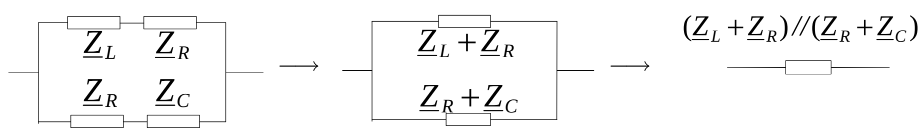
$$\boxed{\begin{array}{c} i(t) = I_0 \cos \omega t \longrightarrow \underline{i}(t) = I_0 e^{j\omega t}. \\ i_1(t) = I_1 \cos(\omega t + \phi_1) \longrightarrow \underline{i}_1(t) = I_1 e^{j(\omega t + \phi_1)} = \underline{I}_1 e^{j\omega t}. \\ i_2(t) = I_2 \cos(\omega t + \phi_2) \longrightarrow \underline{i}_2(t) = I_2 e^{j(\omega t + \phi_2)} = \underline{I}_2 e^{j\omega t}. \end{array}}$$

L'impédance complexe $\underline{Z}$ est définie par $\underline{u}=\underline{Z}\,\underline{i}$

Nous avons: $\left\{ \begin{array}{l} \underline{u} = \underline{Z}(\underline{i}_1 + \underline{i}_2) \\ \underline{u} = \underline{u}_L + \underline{u}_R \\ \underline{u} = \underline{u}_R + \underline{u}_C \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{u} = \underline{Z}(\underline{i}_1 + \underline{i}_2) \\ \underline{u} = \mathrm{L}\dfrac{d\underline{i}_1}{dt} + \mathrm{R}\underline{i}_1 = (j\mathrm{L}\omega + \mathrm{R})\,\underline{i}_1 \\ \underline{u} = \mathrm{R}\underline{i}_2 + \dfrac{1}{\mathrm{C}}\int \underline{i}_2 dt = (\mathrm{R} + \dfrac{1}{j\mathrm{C}\omega})\underline{i}_2 \end{array} \right. \Longrightarrow$

$$\underline{u} = \underline{Z}\left(\frac{\underline{u}}{j\mathrm{L}\omega + \mathrm{R}} + \frac{\underline{u}}{\mathrm{R} + \dfrac{1}{j\mathrm{C}\omega}}\right) \Longrightarrow \underline{Z} = \frac{(\mathrm{R} + j\mathrm{L}\omega)(1 + j\mathrm{RC}\omega)}{1 - \mathrm{LC}\omega^2 + j2\mathrm{RC}\omega} = \frac{\mathrm{R}(1 - \mathrm{LC}\omega^2) + j\omega\left(\mathrm{L} + \mathrm{R}^2\mathrm{C}\right)}{1 - \mathrm{LC}\omega^2 + j2\mathrm{RC}\omega}.$$

(ii) On peut trouver l'impédance équivalente directement en observant le branchement des quatre impédances:



$$\underline{Z} = \frac{(\underline{Z}_L + \underline{Z}_R).(\underline{Z}_R + \underline{Z}_C)}{(\underline{Z}_L + \underline{Z}_R) + (\underline{Z}_R + \underline{Z}_C)} = \frac{(j\mathrm{L}\omega + \mathrm{R})\left(\mathrm{R} + \dfrac{1}{j\mathrm{C}\omega}\right)}{(j\mathrm{L}\omega + \mathrm{R}) + \left(\mathrm{R} + \dfrac{1}{j\mathrm{C}\omega}\right)} = \frac{(\mathrm{R} + j\mathrm{L}\omega)(1 + j\mathrm{RC}\omega)}{1 - \mathrm{LC}\omega^2 + j2\mathrm{RC}\omega}.$$

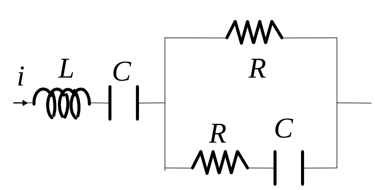
(iii) Pour $\mathrm{LC}\omega^2 = 1$, on trouve $\underline{Z} = \dfrac{\mathrm{L} + \mathrm{R}^2\mathrm{C}}{2\mathrm{RC}}$, qui est bien réelle.

(iv) Pour que $\underline{Z}$ soit réelle il faut que $\mathrm{Im}(\underline{Z}) = 0$. On a

$$\underline{Z} = \frac{\mathrm{R}(1 - \mathrm{LC}\omega^2) + j\omega\left(\mathrm{L} + \mathrm{R}^2\mathrm{C}\right)}{1 - \mathrm{LC}\omega^2 + j2\mathrm{RC}\omega} = \frac{\mathrm{R}(1 - \mathrm{LC}\omega^2)^2 + 2\mathrm{RC}\omega^2\left(\mathrm{L} + \mathrm{R}^2\mathrm{C}\right) + j\omega(1 - \mathrm{LC}\omega^2)\left(\mathrm{L} - \mathrm{R}^2\mathrm{C}\right)}{\left(1 - \mathrm{LC}\omega^2\right)^2 + \left(2\mathrm{RC}\omega\right)^2}.$$

On voit que $\mathrm{Im}(\underline{Z}) = 0$ pour $\mathrm{LC}\omega^2 = 1$ (ce qui a été verifié), **et pour** $\mathrm{L} - \mathrm{R}^2\mathrm{C} = 0$ c'est-à-dire pour $\mathrm{L} = \mathrm{R}^2\mathrm{C}$.

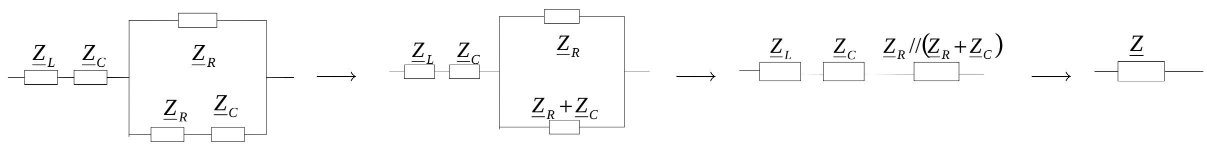
3.3 Soit le circuit ci-contre, où $i(t) = I_0 \sin \omega t$.
(i) Trouver l'impédance complexe $\underline{Z}$ **équivalente directement sans passer par les courants.**
(ii) Comment se simplifie $\underline{Z}$ **pour** $LC\omega^2 = 1$?
Trouver dans ce cas le module de $\underline{Z}$ **ainsi que sa phase** ϕ. (Il suffit de trouver $\tan \phi$.)



Solution:

(i) Les impédances complexes associées à R, L, et C sont respectivement :

$\underline{Z}_R = \mathrm{R}$, $\underline{Z}_L = j\mathrm{L}\omega$, $\underline{Z}_C = \dfrac{1}{j\mathrm{C}\omega}$. Nous avons alors les simplifications suivantes:



$$\underline{Z} = \underline{Z}_L + \underline{Z}_C + \frac{\underline{Z}_R.\left(\underline{Z}_R + \underline{Z}_C\right)}{\underline{Z}_R + \left(\underline{Z}_R + \underline{Z}_C\right)} = j\mathrm{L}\omega + \frac{1}{j\mathrm{C}\omega} + \frac{\mathrm{R}\left(\mathrm{R} + \dfrac{1}{j\mathrm{C}\omega}\right)}{2\mathrm{R} + \dfrac{1}{j\mathrm{C}\omega}} = \frac{1 - \mathrm{LC}\omega^2}{j\mathrm{C}\omega} + \frac{\mathrm{R}\left(1 + j\mathrm{RC}\omega\right)}{1 + j2\mathrm{RC}\omega}.$$

(ii) Pour $\mathrm{LC}\omega^2 = 1$, $\underline{Z}$ se simplifie en $\underline{Z} = \mathrm{R}\dfrac{1 + j\mathrm{RC}\omega}{1 + j2\mathrm{RC}\omega}$.

Son module est $|\underline{Z}| = \mathrm{R}\sqrt{\dfrac{1 + \mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\omega^2}{1 + 4\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\omega^2}}$.

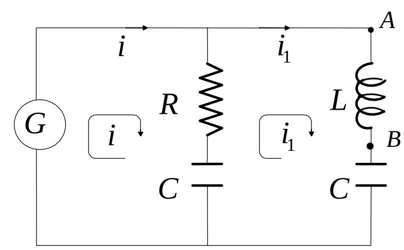
Trouvons la phase: $\underline{Z} = \mathrm{R}\dfrac{1 + j\mathrm{RC}\omega}{1 + j2\mathrm{RC}\omega} = \mathrm{R}\dfrac{1 + 2\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\omega^2 - j\mathrm{RC}\omega}{1 + 4\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\omega^2} \Longrightarrow \tan\phi = \dfrac{\mathrm{Im}\left(\underline{Z}\right)}{\mathrm{Re}\left(\underline{Z}\right)} = \dfrac{-\mathrm{RC}\omega}{1 + 4\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\omega^2}$.

3.4 Soit le circuit ci-contre, où $i\left(t\right) = I_0 \cos\omega t$.

(i) En passant à la représentation complexe, appliquer la loi des mailles à la maille de droite du circuit.

(ii) Déduire l'amplitude complexe $\underline{I}_1$ du courant $\underline{i}_1$ en fonction de l'amplitude I_0 du courant rentrant.

(iii) Déduire en fonction de I_0 l'amplitude complexe $\underline{U}_{AB}$ associée à la tension u_{AB} entre les deux points A et B.



Solution:

(i) Utilisons la representation complexe suivante:

$$\boxed{\begin{array}{c} i\left(t\right) = I_0\cos(\omega t) \longrightarrow \underline{i}\left(t\right) = I_0 e^{j\omega t}. \\ i_1\left(t\right) = I_1\cos(\omega t + \phi) \longrightarrow \underline{i}_1\left(t\right) = I_1 e^{j(\omega t + \phi)} = \underline{I}_1 e^{j\omega t}. \end{array}}$$

Appliquons la loi des mailles à la maille de droite: $\underline{u}_L + \underline{u}_C + \underline{u}_C + \underline{u}_R = 0$

$$\Longrightarrow \mathrm{L}\frac{d\underline{i}_1}{dt} + \frac{1}{\mathrm{C}}\int \underline{i}_1 dt + \frac{1}{\mathrm{C}}\int\left(\underline{i}_1 - \underline{i}\right)dt + \mathrm{R}(\underline{i}_1 - \underline{i}) = 0.$$

(ii) Comme $\boxed{\dfrac{d\underline{i}_1}{dt} = j\omega\underline{i}_1, \quad \int \underline{i}_1 dt = \dfrac{1}{j\omega}\underline{i}_1, \quad \dfrac{d\underline{i}}{dt} = j\omega\underline{i}, \quad \int \underline{i} dt = \dfrac{1}{j\omega}\underline{i},}$ on trouve

$$(j\mathrm{L}\omega + \mathrm{R} + \frac{2}{j\mathrm{C}\omega})\underline{I}_1 e^{j\omega t} - (\frac{1}{j\mathrm{C}\omega} + \mathrm{R})I_0 e^{j\omega t} = 0 \Longrightarrow \boxed{\underline{I}_1 = \frac{1 + j\mathrm{RC}\omega}{2 - \mathrm{LC}\omega^2 + j\mathrm{RC}\omega}I_0.}$$

(iii) $\underline{u}_{AB} = \mathrm{L}\dfrac{d\underline{i}_1}{dt} = j\mathrm{L}\omega\underline{i}_1 = j\mathrm{L}\omega\underline{I}_1 e^{j\omega t}$.

L'amplitude complexe $\underline{U}_{AB}$ de $\underline{u}_{AB}$ est donc, $\underline{U}_{AB} = j\mathrm{L}\omega\underline{I}_1 = \dfrac{\mathrm{L}\omega\left(-\mathrm{RC}\omega + j\right)}{2 - \mathrm{LC}\omega^2 + j\mathrm{RC}\omega}I_0$.

4) Intégrales et Séries de Fourier

4.1 Effectuer les intégrales suivantes:

(i) $\int_1^2 \sin \frac{3\pi}{2} t\, dt.$ (ii) $\int_0^T \sin \frac{2\pi n}{T} t\, dt.$ (iii) $\int_0^T \cos \frac{2\pi n}{T} t\, dt.$

(iv) $\int_1^3 (3t-2)\cos 5t\, dt.$ (v) $\int_3^5 \sin 2t \cos 3t\, dt.$ (vi) $\int_{-1}^1 \sin^2 t\, dt.$

(vii) $\int_0^T \sin \frac{2\pi n}{T} t\ \cos \frac{2\pi m}{T} t\ dt.$ (viii) $\int_0^T \sin \frac{2\pi n}{T} t\ \sin \frac{2\pi m}{T} t\ dt.$ (ix) $\int_0^T \cos \frac{2\pi n}{T} t\ \cos \frac{2\pi m}{T} t\ dt.$

Solution:

(i) $\int_1^2 \sin \frac{3\pi}{2} t\, dt = \left[-\frac{2}{3\pi}\cos \frac{3\pi}{2} t\right]_1^2 = -\frac{2}{3\pi}\left(\cos 3\pi - \cos \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{2}{3\pi}.$

(ii) $\int_0^T \sin \frac{2\pi \mathrm{n}}{T} t\, dt = \left[-\frac{T}{2\pi \mathrm{n}}\cos \frac{2\pi \mathrm{n}}{T} t\right]_0^T = -\frac{T}{2\pi \mathrm{n}}\left(\cos 2\pi \mathrm{n} - \cos 0\right) = 0.$

(iii) $\int_0^T \cos \frac{2\pi \mathrm{n}}{T} t\, dt = \left[\frac{T}{2\pi \mathrm{n}}\sin \frac{2\pi \mathrm{n}}{T} t\right]_0^T = \frac{T}{2\pi \mathrm{n}}\left(\sin 2\pi \mathrm{n} - \sin 0\right) = 0.$

(iv)
$$\begin{aligned}\int_1^3 (3t-2)\cos 5t\ dt &= \left[\frac{1}{5}(3t-2)\sin 5t\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{3}{5}\sin 5t\ dt \\ &= \left[\frac{1}{5}(3t-2)\sin 5t\right]_1^3 + \left[\frac{3}{25}\cos 5t\right]_1^3 = \frac{1}{5}(7\sin 15 - \sin 5) + \frac{3}{25}(\cos 15 - \cos 5).\end{aligned}$$

(v) Il faut d'abord transformer le produit en une somme: (Voir page 1)
$$\begin{aligned}\int_3^5 \sin 2t\ \cos 3t\ dt &= \frac{1}{2}\int_3^5 [\sin(-t) + \sin 5t]\, dt = \frac{1}{2}\left[\cos(-t) - \frac{1}{5}\cos 5t\right]_3^5 \\ &= \frac{1}{2}\cos 5 - \frac{1}{2}\cos 3 - \frac{1}{10}\cos 25 + \frac{1}{10}\cos 15.\end{aligned}$$

(vi) Il faut d'abord transformer le produit en une somme:
$$\int_{-1}^1 \sin^2 t\ dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (1-\cos 2t)\ dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-1}^1 = 1 - \frac{1}{2}\sin 2.$$

(vii) Il faut d'abord transformer le produit en une somme:
$$\int_0^T \sin \frac{2\pi \mathrm{n}}{T} t \cos \frac{2\pi \mathrm{m}}{T} t\, dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^T \sin \frac{2\pi(\mathrm{n}-\mathrm{m})}{T} t + \int_0^T \sin \frac{2\pi(\mathrm{n}+\mathrm{m})}{T} t\right] dt = 0.$$

(viii) Il faut d'abord transformer le produit en une somme:
$$\int_0^T \sin \frac{2\pi \mathrm{n}}{T} t\ \sin \frac{2\pi \mathrm{m}}{T} t\, dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^T \cos \frac{2\pi(\mathrm{n}-\mathrm{m})}{T} t - \int_0^T \cos \frac{2\pi(\mathrm{n}+\mathrm{m})}{T} t\right] dt$$

• Si n=m: $= \frac{1}{2}\left[\int_0^T 1.dt - \int_0^T \cos \frac{4\pi \mathrm{n}}{T} t\ dt\right] = \frac{T}{2}.$

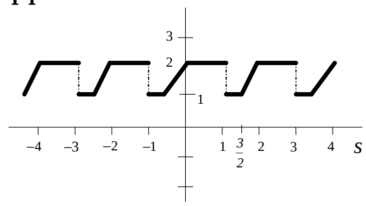
• Si n≠m: $= \frac{1}{2}\left[\int_0^T \cos \frac{2\pi(\mathrm{n}-\mathrm{m})}{T} t\ dt - \int_0^T \cos \frac{2\pi(\mathrm{n}+\mathrm{m})}{T} t\ dt\right] = 0.$

(ix) Il faut d'abord transformer le produit en une somme:
$$\int_0^T \cos \frac{2\pi \mathrm{n}}{T} t\ \cos \frac{2\pi \mathrm{m}}{T} t\, dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^T \cos \frac{2\pi(\mathrm{n}-\mathrm{m})}{T} t + \int_0^T \cos \frac{2\pi(\mathrm{n}+\mathrm{m})}{T} t\right] dt$$

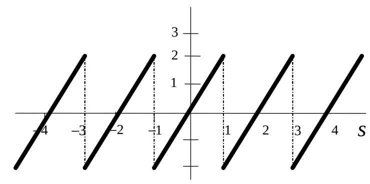
• Si n=m: $= \frac{1}{2}\left[\int_0^T 1.dt + \int_0^T \cos \frac{4\pi \mathrm{n}}{T} t\ dt\right] = \frac{T}{2}.$

• Si n≠m: $= \frac{1}{2}\left[\int_0^T \cos \frac{2\pi(\mathrm{n}-\mathrm{m})}{T} t\ dt + \int_0^T \cos \frac{2\pi(\mathrm{n}+\mathrm{m})}{T} t\ dt\right] = 0.$

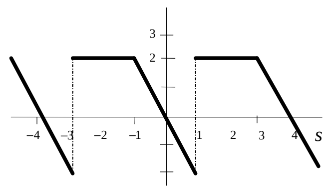
4.2 Développer en série de Fourier les fonctions périodiques suivantes.



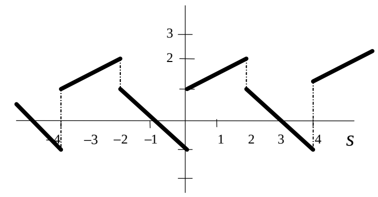
(i)



(k)



(l)



(o)

Rappel: L'équation d'un segment de droite inclinée est $\alpha t+\beta$.

Solution:

(i) D'après le graphe, la fonction n'est ni paire ni impaire, et sa période est T=2s.

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \;=\; \frac{1}{2}\left[\int_0^1 2.dt+\int_1^{3/2} 1.dt+\int_{3/2}^2 (2t-2)\,.dt\right] \;=\; \frac{13}{8}.$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\,\frac{2\pi n}{T}t\;dt$$

$$= \frac{2}{2}\left[\int_0^1 2.\cos\pi nt\;dt+\int_1^{3/2} 1.\cos\pi nt\;dt+\int_{3/2}^2 (2t-2)\,.\cos\pi nt\;dt\right] = \frac{2}{\pi^2 n^2}\left(1-\cos\frac{3\pi n}{2}\right).$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\,\frac{2\pi n}{T}t\;dt$$

$$= \frac{2}{2}\left[\int_0^1 2.\sin\pi nt\;dt+\int_1^{3/2} 1.\sin\pi nt\;dt+\int_{3/2}^2 (2t-2)\,.\sin\pi nt\;dt\right] = -\frac{1}{\pi n}\cos\pi n-\frac{2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{3\pi n}{2}.$$

La série de Fourier de la fonction est donc

$$f(t) = \frac{13}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^2 n^2}\left(1-\cos\frac{3\pi n}{2}\right)\cos n\omega t-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi n}\cos\pi n+\frac{2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{3\pi n}{2}\right)\sin n\omega t.$$

(k) D'après le graphe, la fonction est impaire, et sa période est T=2s.

$a_0 = a_n = 0.$ (Car la fonction est impaire.)

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\sin\frac{2\pi n}{T}t\;dt = \frac{2}{2}\left[\int_{-1}^1 2t.\sin\pi nt\right] = -\frac{4}{\pi n}\cos\pi n.$$

La série de Fourier de la fonction est donc $f(t) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n}\cos\pi n\sin n\omega t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin n\omega t.$

(l) D'après le graphe, la fonction n'est ni paire ni impaire, et sa période est T=4s.

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\;dt = \frac{1}{4}\left[\int_{-1}^1 -2t.\;dt+\int_1^3 2.\;dt\right] = 1.$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}\;dt$$

$$= \frac{2}{4}\left[\int_{-1}^1 -2t.\cos\frac{\pi n}{2}t\;dt+\int_1^3 2.\cos\frac{\pi n}{2}t\;dt\right] = \frac{2}{\pi n}\left(\sin\frac{3\pi n}{2}-\sin\frac{\pi n}{2}\right).$$

$$\mathrm{b}_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f\left(t\right)\sin\frac{2\pi \mathrm{n}}{T}t\ dt$$
$$= \frac{2}{4}\left[\int_{-1}^{1} -2t.\sin\frac{\pi \mathrm{n}}{2}t\ dt + \int_{1}^{3} 2.\sin\frac{\pi \mathrm{n}}{2}t\ dt\right] = \frac{2}{\pi \mathrm{n}}(3\cos\frac{\pi \mathrm{n}}{2} - \cos\frac{3\pi \mathrm{n}}{2}) - \frac{8}{\pi^2 \mathrm{n}^2}\sin\frac{\pi \mathrm{n}}{2}.$$

La série de Fourier de la fonction est donc

$$f(t) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi \mathrm{n}}(\sin\frac{3\pi \mathrm{n}}{2} - \sin\frac{\pi \mathrm{n}}{2})\cos \mathrm{n}\omega t + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi \mathrm{n}}(3\cos\frac{\pi \mathrm{n}}{2} - \cos\frac{3\pi \mathrm{n}}{2}) - \frac{8}{\pi^2 \mathrm{n}^2}\sin\frac{\pi \mathrm{n}}{2}\right]\sin \mathrm{n}\omega t.$$

(o) D'après le graphe, la fonction n'est ni paire ni impaire, et sa période est T=4s.

$$\mathrm{a}_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f\left(t\right)\ dt = \frac{1}{4}\left[\int_0^2\left(\frac{1}{2}t + 1\right).\ dt + \int_2^4\left(-t+3\right).\ dt\right] = \frac{3}{4}.$$

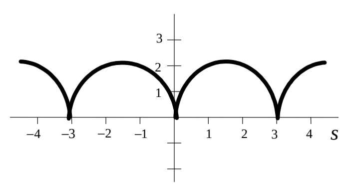
$$\mathrm{a}_n = \frac{2}{T}\int_0^T f\left(t\right)\cos\frac{2\pi \mathrm{n}t}{T}\ dt$$
$$= \frac{2}{4}\left[\int_0^2\left(\frac{1}{2}t+1\right).\cos\frac{\pi \mathrm{n}}{2}t\ dt + \int_2^4\left(-t+3\right).\cos\frac{\pi \mathrm{n}}{2}t\ dt\right] = \frac{3}{\pi^2 \mathrm{n}^2}\left(\cos\pi \mathrm{n} - 1\right).$$

$$\mathrm{b}_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\ \frac{2\pi \mathrm{n}}{T}t\ dt$$
$$= \frac{2}{4}\left[\int_0^2\left(\frac{1}{2}t+1\right).\sin\frac{\pi \mathrm{n}}{2}t\ dt + \int_2^4\left(-t+3\right).\sin\frac{\pi \mathrm{n}}{2}t\ dt\right] = \frac{1}{\pi \mathrm{n}}\left(2 - \cos\pi \mathrm{n}\right).$$

La série de Fourier de la fonction est donc

$$f(t) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\pi^2 \mathrm{n}^2}\left(\cos\pi \mathrm{n} - 1\right)\cos \mathrm{n}\omega t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi \mathrm{n}}\left(2 - \cos\pi \mathrm{n}\right)\sin \mathrm{n}\omega t.$$

4.3 Développer en série de Fourier puis tracer le spectre de la fonction périodique suivante.



On donne l'équation de la première bosse à droite : $2\sin\frac{\pi}{3}t$.

Solution:

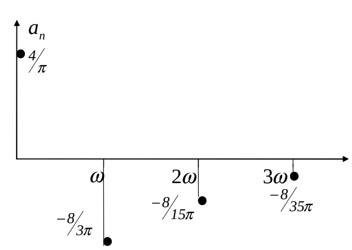
D'après le graphe, la fonction est paire et sa période est T=3s.

$$\mathrm{a}_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt\ =\ \frac{1}{3}\int_0^3 2\sin\frac{\pi}{3}t\ dt\ =\ \frac{4}{\pi}.$$

$$\mathrm{a}_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\ \frac{2\pi \mathrm{n}}{T}t\ dt\ = \frac{2}{3}\int_0^3 2\sin\frac{\pi}{3}t\ \cos\ \frac{2\pi \mathrm{n}}{3}t\ dt = \frac{8}{\pi\left(1 - 4\mathrm{n}^2\right)}.$$

$\mathrm{b}_n = 0.$ (Car la fonction est paire.)

La série de Fourier de la fonction est $\quad f(t) = \dfrac{4}{\pi} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi\left(1-4\mathrm{n}^2\right)}\cos \mathrm{n}\omega t.$



Le spectre de la fonction est le graphe des a_n et b_n en fonction de $\mathrm{n}\omega$ (Voir ci-contre) :

Le graphe des b_n *pour ce cas n'existe pas car ils sont tous nuls.*