Université de Mascara
Faculté des Sciences Exactes
Département de mathématiques
Module : Analyse1

Travaux dirigés
L.M.D Année 2016-2017
Enseignant : Dr. Bahlil Mounir

TD n$^\circ$ 01

Exercice 1

Déterminer $\sup$, $\inf$, $\max$, $\min$ des ensembles suivants :
$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B =]1, 4[$, $C = [0, 1[$, $D = [0, 1]$

Exercice 2

Soient $A = \{\frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1}, \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1},\ \ n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{\frac{n-1}{2n+1},\ \ n \in \mathbb{N}^*\}$
$i)$ Montrer que A, B sont bornés.
$ii)$ Déterminer leurs bornes supérieures et inférieures.

Exercice 3

Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On définit

$$A + B = \{a + b;\ \ a \in A,\ \ b \in B\}.$$

Montrer que si A et B sont bornées, alors $A + B$ l'est aussi et que :
$i)$ $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
$ii)$ $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

Exercice 4

Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}_+$.
On définit

$$AB = \{ab;\ \ a \in A,\ \ b \in B\}.$$

Montrer que si A et B sont majorées, alors AB l'est aussi et que

$$\sup(AB) = \sup A. \sup B$$

Est-ce que encore vrai si A et B contiennent des réels négatifs ?

Exercice 5

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x, y \in I,\ \ x < y,\ \ ]x, y[\subset I.$$

Démontrer que si I n'est ni majoré ni minoré alors $I = \mathbb{R}$.

Exercice 6

Montrez en utilisant l'axiome de la borne supérieure que toute partie non vide et minorée $E \subset \mathbb{R}$ admet une borne inférieure et que

$$\inf(E) = -\sup(-E).$$

Exercice 7

Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$i)$ $|x| = \max(x, -x)$

$ii)$ $|xy| = |x||y|$; $|x^n| = |x|^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$iii)$ $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$; $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$

$iv)$ $|x + y| \leq |x| + |y|$ (on a l'égalité si, et, seulement si, x et y sont du même signe).

$v)$ $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Exercice 8

Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$i)$ $\forall n \in \mathbb{N}$; $[x + n] = [x] + n$.

$ii)$ $[x] \leq x < [x + 1] = [x] + 1$.

$iii)$ $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$.

$iv)$ $[x] - 1 < x < [x] + 1$.

Exercice 9

Montrer que l'axiome d'Archimède est une conséquence de l'axiome de la borne suprieure.