TD n$^\circ$ 02

Exercice 1

Etudier la monotonie des suites $(a_n)_{n\geq 0}$ définies par :

a) $a_n = e^n$, b) $a_n = n^2 - 2n$, c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, d) $a_n = n\alpha + (-1)^n$ (α réel positif),

e) $a_n = \frac{1}{(n+1)!}$, f) $a_n = (-1)^n$, g) $a_n = n^n - n!$, h) $a_0 > \frac{2}{3}$ et $a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2}$.

Exercice 2

En utilisant la définition de la limite d'une suite montrer que :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2n-3} = 1$,

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{(n)^{\frac{1}{2}}} = +\infty$.

Exercice 3

Calculer

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{2}}$, b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ $(a>0, b>0)$, c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$,

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{(-1)^n n}{(-1)^{n+1}n+1}}$, e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+5)(n+7)}{n^2+n+35}$.

Exercice 4

Calculer

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2+n)$, b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}}+1)(n^2+3)$, c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n^2-3}$,

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-3\sqrt{n})$, e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5n^2+4}{4n^2+3}$, f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n^2+n}{n+3}$, g) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$.

Exercice 5

Prouver la convergence ou la divergence des suites :

a) $a_n = \frac{1.3.5.7....(2n+1)}{2.4.6....2(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$,

b) $b_n = -2\sqrt{n} + (\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}})$, $n \in \mathbb{N}^*$,

<u>Indication</u> : établir d'abord les inégalités

$2(\sqrt{n+1}-1) < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

c) $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$,

d) $d_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$,

e) $e_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6

Distinguer le vrai du faux. Soit (u_n) une suite réelle.

a) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq 1$, alors la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

b) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq n_0$.

c) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$.

d) Si $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0, alors (u_n) possède une limite finie.

e) Si la suite (u_n) ne tend pas vers l'infini, alors elle est bornée.

f) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$, aors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$ on ait $u_n \leq 0$.

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 1 \qquad \text{et} \quad 0 \leq v_n \leq 1, \\ \text{et} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1. \end{cases}$$

Montrer que les suites u_n et v_n sont convergentes et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

Exercice 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Quelle est leur limite commune ?

2) On suppose qu'il existe deux entiers non nuls p et q tel que $e = \frac{p}{q}$.

a) Montrer que l'hypothèse implique que $e \times q!$ est un entier.

b) Montrer que $u_q \times q!$ est aussi un entier.

c) Que vaut $(q!)(v_q - u_q)$?

d) Mettre en évidence une absurdité. Que peut-on conclure ?

Indication :

$\forall x \in]0,1], \quad 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} < e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + 2\frac{x^n}{n!}$

Exercice 9

Utiliser le critère de Cauchy pour étudier la nature des suites suivantes :

1) $w_n = \cos \frac{1}{n}$.

2) $u_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + ... + \frac{\sin n}{2^n}$.

3) $v_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$.

4) $p_n = \frac{1}{ln2} + \frac{1}{ln3} + ... + \frac{1}{lnn}, \quad \forall n \geq 2$.

Exercice 10

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $u_n = (-1)^n$

1) Montrez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et minorée.

2) Montrez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

3) Montrez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

4) Peut on appliquer le théorème de Bolzano-Weistrass à cette suite ?

5) Trouvez toutes les valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6) Trouvez $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$.