Université de Mascara
Faculté des Sciences Exactes
Département de mathématiques
Module : Analyse1

Travaux dirigés
L.M.D Année 2016-2017
Enseignant : Dr. Bahlil Mounir

TD n$^\circ$ 04

Exercice 1

Etudier la dérivabilité des deux fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

i) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & , \quad \text{si } x \neq 0 \\ 0 & , \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$

ii) $g(x) = \arcsin(1 - x^3)$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arctan\frac{x+a}{1-ax} - \arctan x, \quad a \neq 0$

i) Déterminer le domaine D de continuité et dérivabilité de la fonction f.

ii) Calculer la dérivée de la fonction f.

iii) Montrer que :

$$f(x) = \arctan(-\frac{1}{a}) + \frac{\pi}{2} \quad si \quad x \in]-\infty, \frac{1}{a}[$$

$$f(x) = \arctan(-\frac{1}{a}) - \frac{\pi}{2} \quad si \quad x \in]\frac{1}{a}, +\infty[$$

Exercice 3

Vérifier que la dérivée d'une fonction dérivable paire et impaire, que la dérivée d'une fonction dérivable impaire est paire.

Exercice 4

Calculer les dérivées d'ordre n des fonctions définies par :

a) $f(x) = \sin x$, b) $f(x) = \cos x$, c) $f(x) = x^2 \sin 3x$, d) $f(x) = e^x . \sin x$,
e) $f(x) = e^x . \cos x$, f) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, g) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$.

Exercice 5

Soit $g: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant une deuxième dérivée continue et telle que $g(0) = g'(0) = 0$.
Soit

$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & , \quad \text{si } x \neq 0 \\ 0 & , \quad \text{sinon} \end{cases}$

Calculer $f'(0)$.

Exercice 6

En utilisant la règle de l'Hopital, calculez

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$, 2) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1}$, 3) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\log(\cos 3x)}{\log(\cos 2x)}$, 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2-x+5}{5x^2+6x-3}$, 5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-x}$,
6) $\lim\limits_{x\to O^+} \frac{\log(\tan 2x)}{\log(\tan 3x)}$, 7) $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2})$.

Exercice 7

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \arccos(\tan(x))$, 2) $f(x) = (\arctan(x))^4$, 3) $f(x) = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$,
4) $f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$, 5) $f(x) = \frac{\sqrt{\cos x}}{1-e^{-x}}$, 6) $f(x) = e^{\cos\sqrt{x}}$, 7) $f(x) = \arcsin(\frac{x^2-1}{x^2})$.

Exercice 8

En utilisant le théorème des accroissents finis, montrer les inégalités suivantes :

1) $\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leq x.$
2) $\forall x \in]-\infty, +\infty[, \quad e^x \geq 1 + x.$
3) $\forall x \in [0, +\infty[, \quad \sin x \leq x.$
4) $\forall x \in]0, 1[, \quad \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$
5) $\forall x \in]0, +\infty[, \quad \arctan x > \frac{x}{1+x^2}.$

Exercice 9

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \arccos x$.

a) Donner le domaine de f et étudier la continuité et le prolongement par continuité de cette fonction.
b) Donner la dérivée f' de la fonction f.
c) Montrer que l'inégalité

$$\arccos x > \sqrt{1-x^2}$$

est vérifiée pour tout x élément de $]-1, 1[$.
La fonction f est-elle monotone ?

Exercice 10

Soient a un nombre réel et f une fonction numérique réelle définie et dérivable sur $[a, +\infty[$.

a) Montrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
b) Montrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.