Université de Mascara
Faculté de Sciences Exactes
Département de Mathématiques

2$^{\text{ème}}$ Année Licence Mathématique
Module : Analyse 3
2016/2017
A. Baliki

Fiche TD N° 1 (Séries Numériques)

Exercice 1 *Calculer la somme des séries dont le terme général u_n est donné par*

1. $\dfrac{1}{n^2+3n+2}$
2. $\ln\left(\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$, $n \geq 1$
3. $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Exercice 2 *Montrer la divergence des séries dont les termes généraux sont définis par :*

$$n!, \qquad n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \qquad \operatorname{ch}(n), \qquad \max(2, \cos(n)), \qquad \sin(n).$$

Exercice 3

1. *Déterminer les réels a et b pour que la série de terme général*

$$u_n = a\ln(n+3) + b\ln(n+2) + \ln(n+1),$$

avec $n \geq 1$, soit convergente.

2. *Calculer alors la somme de la série.*

Exercice 4 *Étudier la nature des séries de termes généraux suivants :*

1. $\dfrac{n!}{n^{an}}$, $a > 0$
2. $\ln\left(1+\dfrac{5}{n^2}\right)$
3. $\left(\dfrac{2n^2}{n^2+1}\right)^n$
4. $\left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$
5. $\dfrac{1 + \ln n}{n\sqrt{n}}$
6. $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\alpha}$

Exercice 5 *Étudier la (convergence absolue, semi-convergence, divergence) des séries suivantes :*

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+e^n}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{1+n\ln(n)}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \tan^n \alpha$

Exercice 6 *Étudier la convergence des séries :*

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1+\frac{2(-1)^n}{n}\right)$.
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$.