Université de Mascara
Faculté de Sciences Exactes
Département de Mathématiques

$2^{\text{ème}}$ Année Licence Mathématique
Module : Analyse 3
2016/2017
A. Baliki

Fiche TD N° 2 (Suites et Séries de Fonctions)

Exercice 1 *Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_n$ sur le domaine indiqué :*

1. $f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln(x) &]0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ *sur* $[0,1]$
2. $f_n(x) = x \arctan(nx)$ *sur* $\mathbb{R}$
3. $f_n(x) = n^a x e^{-nx}$ *sur* $\mathbb{R}$ *avec* $a \in \mathbb{R}$
4. $f_n(x) = \dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$ *sur* $[0,1]$

Exercice 2 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[-1,1]$ par* $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$.

1. *Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers une fonction f qu'on déterminera.*
2. *Étudier la convergence uniforme de $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[-1,1]$.*
3. *On considère la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[-1,1]$ par* $g_n(x) = \dfrac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}$.
   Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est uniformément convergente sur $[-1,1]$ vers 0.

Exercice 3 *Étudier la convergence (simple, normale) des séries de fonctions suivantes :*

1. $\sum_n \dfrac{x^n}{1+x^n}$ *sur* $\mathbb{R}_+$
2. $\sum_{n\geq 2} \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$ *sur* $\mathbb{R}_+$
3. $\sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$ *sur* $[-a,a]$

Exercice 4 *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions telle que : $f_n(x) = e^{-n^\alpha x}$ pour $\alpha > 0$.*
On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

1. ***1.*** *Trouver le domaine de définition de f.*
2. ***2.*** *Étudier la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.*

Exercice 5 *Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, posons*

$$f_n(x) = x^2 e^{-nx} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt.$$

A. *Étude de la série de fonctions* $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$.
   1. *Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.*
      On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+$.
   2. *Montrer que f et continue sur $\mathbb{R}_+$.*
   3. *Calculer $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.*

B. *Etude de la série de fonctions* $\sum_{n\geq 1} F_n(x)$.
   1. *Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. A l'aide de deux intégrations par parties, calculer $F_n(x)$.*
   2. *Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} F_n(x)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$.*
      On pose $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+$.
   3. *Calculer* $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

C. *Montrer que* $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \forall\, x \in \mathbb{R}_+$.

D. *En déduire l'identité suivante :*

$$\int_0^\infty \frac{t^2}{e^t - 1}\,dt = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$