Université Mustapha Stambouli Mascara
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

$2^{\text{éme}}$ année L.M.D-Math
Module : Analyse Numérique 1
Année Universitaire : 2017/2018

Examen du 24.01.2018
Durée : 1h 30m

Question de cours (2 *pts*) Soit f une fonction dont on connaît les valeurs $f(x_i)$ aux points x_i, avec $x_i = x_{i-1} + h$, $i = \overline{1,n}$; $h > 0$. Ecrire les différences divisées d'ordre $k (0 \leq k \leq n)$ en fonction des différences finies progressives d'ordre k.

Exercice 1 (5.5 *pts*) *Soit la fonction f donnée par :*

x_i	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$f(x_i)$	1	-1	1	-1

1. *Construire le polynôme d'interpolation $Q(x)$ de f aux points x_i sous la forme de Newton.*
2. *Ecrire l'erreur d'interpolation $E(x)$ en ces quatre points.*
3. *Montrer que $|E(x)| \leq \frac{M}{96}$, où $M = \max\limits_{x\in[-1,1]} |f^{(4)}(x)|$.*

Exercice 2 (7 *pts*) *Soit f une fonction continue donnée sur l'intervalle $[-1,1]$. Notons par P le polynôme de degré deux qui interpole f en les points -1, 0 et 1.*

1. *Exprimer $\int_{-1}^{1} P(x)dx$ en fonction de $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$.*
2. *Vérifier que l'expression obtenue coïncide avec une formule d'intégration numérique dont on donnera le nom.*
3. *Étudier le degré de précision de cette formule de quadrature.*
4. *Soit $h = \frac{b-a}{2n}$ et $x_i = a + ih$ pour $i = \overline{0, 2n}$. On subdivise l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ de largeur $2h$. À l'aide d'un changement de variable affine, en déduire une formule de quadrature pour l'intégrale*
$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx.$$
5. *En déduire une formule de quadrature composite pour l'intégrale*
$$\int_a^b f(x)dx.$$

Exercice 3 (5.5 *pts*) *Soit la fonction définie par : $f(x) = e^x - x$ pour $x \in [0, +\infty[$.*

1. *Montrer que f est une bijection de $x \in [0,+\infty[$ sur $x \in [1,+\infty[$.*
2. *On considère la fonction : $g(x) = e^x - x - 2$.*
   a) *Montrer que si α est un zéro de g i.e. $g(\alpha) = 0$ alors $\alpha = f^{-1}(2)$.*
   b) *Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique racine dans $[1,2]$.*
   b) *Appliquer la méthode de Newton-Raphson pour calculer $f^{-1}(2)$ à 10^{-4} prés. Justifier le choix de la condition initiale x_0.*

Bon Courage