Université du Mascara
Département du Maths

$3^{éme}$ anneé Maths
Module : Equations-différentielles
Date 18-01- 2018.

Examen

Exercice 1: On considère le problème de Cauchy suivant:

$$(P)\begin{cases} y^{'}(x) = -\frac{2x}{1+x^2}y - y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que (P) admet unique solution maximale $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$.òu I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
2) Verifier que y est de classe C^∞.
3) Montrer que $y(x) > 0$ $\forall x \in I$.
4) Calculer explicitement y.

Exercice 2 : 1) Résoudre le système suivant:

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{+3t} \end{pmatrix} \quad \text{pour } X(0) \text{ donnée.}$$

2) Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente .
Déterminer e^{Bt} òu $B = aI_{\mathbb{R}^n} + A$; $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3: 1) Discuter la stabilité d'équilibre du système suivant:

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X.$$

2) Soit le système suivant :$\frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t)$ (S)

Montrer que si le système (S) est stable et qu'une solution de (S) est bornée alors toutes les solutions sont bornées.