Corrigé Type de l'Examen Final en Communications Numériques 2 (CN2)

2ème année master Télécom
Mercredi 20 janvier 2016 à 08H30
Salle H3

Durée de l'épreuve: 01H30
Calculatrices scientifiques autorisées

Partie 1 : Questions de cours (6 pts)

1. Citer deux types de codes détecteurs et deux types de codes correcteurs de l'erreur. **(1 pt)**
Codes détecteurs : Codes de parité, codes CRC
Codes correcteurs : Codes de Hamming, codes par répétition

2. Comment pouvons-nous améliorer la performance de détection et de correction des codes : **(1 pt)**
Nous le savons de la théorie de l'information que le codage est plus performant lorsqu'il est plus complexe.
a) Linéaires en bloc :
En augmentant le nombre de bits de redondance et le nombre de bits de message.
b) Convolutifs :
En augmentant le nombre de mémoires.

3. Citer le théorème de Shannon de codage de canal (aussi connu en théorie de l'information par le deuxième théorème de Shannon publié par Claude Shannon en 1948). **(0.5 pt)**
« Si le débit d'une source *R* est inférieur à *C*, où *C* est la capacité du canal ; alors on peut transmettre le contenu de la source sur le canal bruité avec une probabilité d'erreur aussi petite que souhaitée ». Transmettre avec un débit plus faible que *C* revient à ajouter des bits de redondance au message de source. Cette opération s'appelle codage de canal. Il est cependant à noter que, contrairement au théorème du codage de source, le deuxième théorème de Shannon n'explicite pas le code qui permet d'atteindre les performances annoncées.

4. Le calcul du CRC à la transmission: **(0.25 pt par bonne réponse)**

a) Dépend de choix du polynôme générateur G(x): ☑ Vrai ☐ faux

b) Ne dépend pas toujours du message de la source: ☐ Vrai ☑ faux

c) Est plus complexe à force que la longueur des données à coder augmente: ☑ Vrai ☐ faux

d) Permet de corriger plus d'erreurs à force que le degré de G(x) croit : ☐ Vrai ☑ faux

5. Lors d'une réception d'un CRC:

a) Le mot reçu est plus long que le mot transmis: ☐ Vrai ☑ faux

b) Le reste de la division décimale du mot reçu et du polynôme générateur doit être nul pour une réception sans erreurs: ☐ Vrai ☑ faux

c) Le quotient de la division du mot reçu et du polynôme générateur est important : ☐ Vrai ☑ faux

6. Le codage CRC-16 ($G(x)=x^{16}+x^{15}+x^2+1$):

a) Est utilisé en téléphonie filée: ☐ Vrai ☑ faux

b) Détecte des erreurs simples: ☑ Vrai ☐ faux

c) Détecte des erreurs impairs : ☑ Vrai ☐ faux

d) Détecte 99% des salves de 16 bits ou moins : ☐ Vrai ☑ faux

e) Détecte tous les salves de 18 bits ou plus : ☐ Vrai ☑ faux

7. Le codage par répétition est très utilisé dans les systèmes de communications pour détection et correction des erreurs introduites par le canal bruité. Ce codage est aussi très pratiqué dans nos communications par langage oral. Par exemple, il est très courant lorsque nous ne comprenons pas une personne parlant de lui demander de répéter. Avec les fragments d'information recueillis à chaque répétition, on finit par reconstruire le message tel qu'élaboré à la source, dans l'esprit de cette personne. Comment s'effectue alors le décodage de canal par répétition ? **(0.5 pt)**

Le décodage se fait par vote majoritaire. Par exemple, si nous codons le bit 0 par une séquence de trois zéros, i.e. 000 (nombre de répétition = 2) et le bit 1 par la séquence 111; en cas où la chaine reçue est 001, alors le plus souvent, c'est un 0 logique qui a été transmis à la source puisque le bit 0 est majoritaire.

Partie 2 : Exercices divers (16 pts)

<u>Exercice 1 : Codes linéaires en bloc, matrice génératrice et correction par le syndrome</u> (4 pts)

Soit un code linéaire en bloc (LBC) rectangulaire (9,4,4) défini par la matrice génératrice *G* suivante :

$$G=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&1&0&0&1&1\\ 0&0&1&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&1&0&1&0&1&1 \end{pmatrix}$$

1.1- Quels sont les pouvoirs de détection et de correction d'erreurs de ce code?

D'après la définition de code, nous déduisons que sa distance minimale est $d=4$. Les propriétés des codes linéaires en blocs **(0.25 pt)** nous permettent de déduire ce qui suit :

Le pouvoir de détection de ce code est **(0.25 pt)**:

$$d-1=3 \text{ erreurs}$$

Son pouvoir de correction est **(0.25 pt)**:

$$t=\left\lfloor \frac{4-1}{2} \right\rfloor = \lfloor 1.5 \rfloor = 1 \text{ erreur}$$

où, pour rappeler, $\lfloor . \rfloor$ désigne le symbole de la partie entière.

1.2- Donner le nombre de combinaisons pour les erreurs : a) simples, b) doubles.

La matrice génératrice d'un code linéaire en bloc (version systématique) a la forme suivante :

$$G=(I_k \mid P),\ [I_k]=k\times k,\ [P]=k\times r;\ r=n-k$$

où:
k : nombre de bits du message sans codage (longueur du message après codage de source)
n : nombre de bits du message après codage de canal (longueur du mot de code)
$r=n-k$: nombre de bits de contrôle (ou de redondance)

Dans ce cas:

$k=4$, $n=9$ et $r=n-k=5$ **(0.25 pt)**

Nous savons d'après la théorie de codage que chaque ligne de H^T correspond à une erreur simple **<u>(0.25 pt)</u>**, où :

$$H^T=\begin{pmatrix} P \\ \hdashline I_r \end{pmatrix},\ [I_r]=r\times r;\ \ r=n-k$$

P étant la matrice de contrôle :

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.25 pt)}$$

D'où :

$$H^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.25 pt)}$$

Donc le nombre de combinaisons pour les erreurs simples est $n=9$ **(0.25 pt)**.
Le syndrome s défini par :

$$s=R\,H^T,\quad R=r_0r_1\ldots.r_{n-1}$$

est de taille $r=5$. Le nombre de combinaisons possibles du syndrome est donc $2^r=32$ dont un état de zéros partout relatif à une transmission sans erreurs **(0.25 pt)**.
Le nombre de combinaisons pour les erreurs multiples est donc :

$$2^r-n-1=2^5-9-1=32-10=22 \quad \textbf{(0.25 pt)}$$

1.3- Construire la table d'erreur/syndrome correspondant aux quatre dernières lignes de H^T.

La table d'erreur/syndrome est constituée en se basant sur les règles suivantes :

1) Chaque ligne de H^T correspond à une erreur simple,

2) La i ème ligne correspond à l'erreur en bit d'indice i-1. Ceci correspond à une erreur en bit r_{i-1} donc à une valeur de 1 dans le vecteur d'erreur e à la position i-1 où $e=e_0e_1\dots e_{n-1}$ relié au syndrome par la relation :

$$s = RH^T = (v+e)H^T = vH^T+eH^T = eH^T$$

v est un mot de code valide ($vH^T=0$).

Table 1 : Table d'erreur/syndrome de l'exercice 1. **(1 pt)**

Syndrome	Erreur	Observation
00000	000000000	Pas d'erreurs
10101	100000000	Erreur simple en premier bit r_0 (ceci correspond à la 1ère ligne de H^T)
10011	010000000	Erreur simple en deuxième bit r_1 (ceci correspond à la 2ème ligne de H^T)
01101	001000000	Erreur simple en troisième bit r_2 (ceci correspond à la 3ème ligne de H^T)
01011	000100000	Erreur simple en quatrième bit r_3 (ceci correspond à la 4ème ligne de H^T)
10000	000010000	Erreur simple en cinquième bit r_4 (ceci correspond à la 5ème ligne de H^T)
01000	000001000	Erreur simple en sixième bit r_5 (ceci correspond à la 6ème ligne de H^T)
00100	000000100	Erreur simple en septième bit r_6 (ceci correspond à la 7ème ligne de H^T)
00010	000000010	Erreur simple en huitième bit r_7 (ceci correspond à la 8ème ligne de H^T)
00001	000000001	Erreur simple en neuvième bit r_8 (ceci correspond à la 9ème ligne de H^T)

1.4- Corriger le message 100110110 par la méthode de syndrome.

Le syndrome correspondant à ce mot reçu est :

$$s = [1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0]\ H^T = [0\ 1\ 0\ 0\ 0] \quad \textbf{(0.25 pt)}$$

La correction de l'erreur s'effectue en ajoutant le vecteur d'erreur correspondant au syndrome 01000 au mot reçu. Á partir de la table d'erreur/syndrome ci-dessus, nous trouvons le mot corrigé v^* comme suit:

$$v^* = R+e^* = [1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0] + [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \mathbf{1}\ 0\ 0\ 0] = [1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0] \quad \textbf{(0.25 pt)}$$

Dans le cas d'une erreur simple, ce code permet de la localiser et de la corriger. L'erreur est en sixième bit et le mot corrigé vérifie bien la condition de réception sans erreurs :

$$v^*\ H^T=0$$

Pour sujet B :

$$s = [0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0]\ H^T = [1\ 0\ 1\ 0\ 1]$$

$$v^* = R+e^* = [0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0] + [\mathbf{1}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] = [1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0] \quad \text{(erreur est en premier bit)}$$

<u>Exercice 2 : Désignation d'un codeur convolutif</u> (3 pts)

Soit le codeur convolutif de la Figure 1.
2.1- Donner la matrice de transfert en forme binaire et octale.

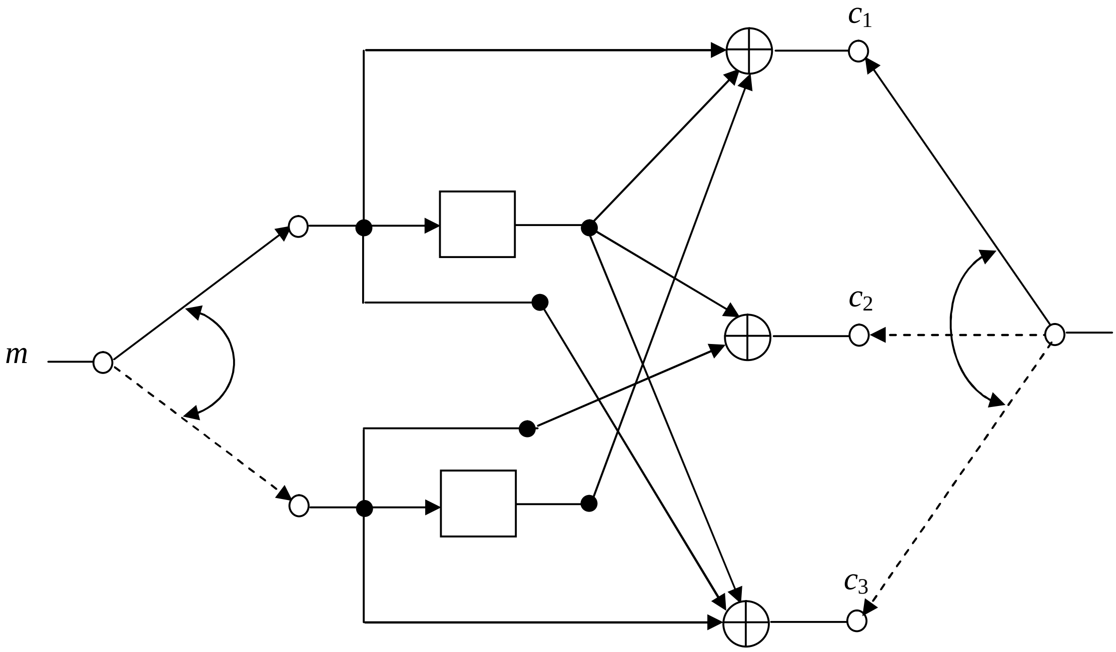

Figure 1 : Circuit logique du codeur convolutif de l'exercice 1/ Sujet A.

La matrice de transfert en binaire est donnée par :

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{33} \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

avec G_{ij} : Matrice de transfert intermédiaire reliant la sortie *j* à l'entrée *i*.
D'après le circuit logique on trouve :

$$G = \begin{pmatrix} 11 & 01 & 11 \\ 01 & 10 & 10 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}_8 \quad \textbf{(1 pt)}$$

<u>Pour sujet B</u> :

$$G = \begin{pmatrix} 11 & 01 & 11 \\ 01 & 11 & 10 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}_8$$

2.2- Donner la réponse impulsionnelle.

$$H(D) = \begin{pmatrix} 1+D & D & 1+D \\ D & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

<u>Pour sujet B</u> :

$$H(D) = \begin{pmatrix} 1+D & D & 1+D \\ D & 1+D & 1 \end{pmatrix}$$

2.3- Donner la désignation complète de ce code.
Code convolutif non-récursif de rendement r=2/3, 1-mémoire, de longueur de contrainte $L=(m+1)\times k=(1+1)\times 2=4$, de matrice de transfert G et de réponse impulsionelle $H(D)$. **(1 pt)**

Exercice 3 : Décodage de Viterbi (7 pts)

On se propose d'étudier le codeur convolutif dont le diagramme d'état est donné par Figure 2-(a).

4.1- Compléter le treillis de code sur Figure 2-(b).

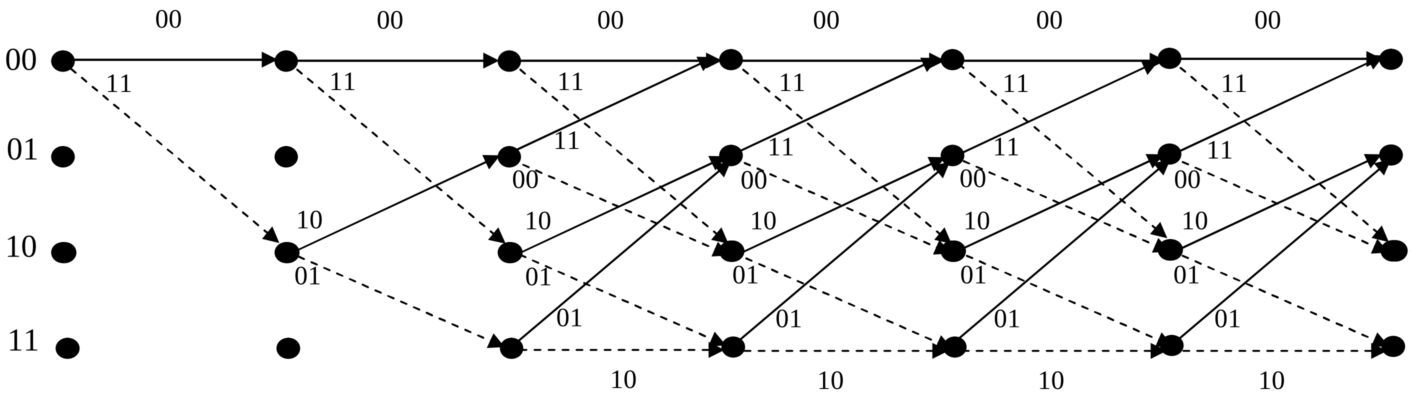

Figure 2 : Treillis de code de l'exercice 3. **(1 pt)**

4.2- L'état initial des registres à décalage s_0s_1 est à 10. Nous enregistrons les transitions suivantes de s_0s_1 :

$$10 \rightarrow 11 \rightarrow 01 \rightarrow 10 \rightarrow 01 \rightarrow 00$$

4.2.1- Déterminer la séquence d'entrée au codeur.
Il est évident que ces transitions correspondent à la séquence d'entrée : m=10100 **(0.25 pt)**

4.2.2- Quel est le mot de code associé à cette séquence si nous considérons un codage systématique ?

En poursuivant le chemin relatif à la séquence m en partant de l'état 10 sur le treillis, nous obtenons le mot suivant :

01 01 00 10 00 **(0.25 pt)**

Pour un codage systématique, le mot de code à transmettre sur le canal est : **1**01**0**01**1**00**0**10**0**00 **(0.25 pt)**

4.3- Si le mot de code à l'émission est : 11 10 00 01 01 00
Dérouler l'algorithme de décodage de Viterbi dans le cadre où les deux premiers bits ont été reçus erronés donnant la séquence : **00** 10 00 01 01 00

Déterminer la séquence émise la plus vraisemblable.
En déroulant l'algorithme de Viterbi **(2.5 pts)**, nous arrivons à corriger les deux bits successifs reçus erronés. La séquence émise la plus vraisemblables est : 101101…**(0.25 pt)**

4.4- Tracer le circuit logique du codeur.

En analysant les entrées/sorties et les transitions sur le treillis de code, nous déduisons le circuit logique suivant du codeur :

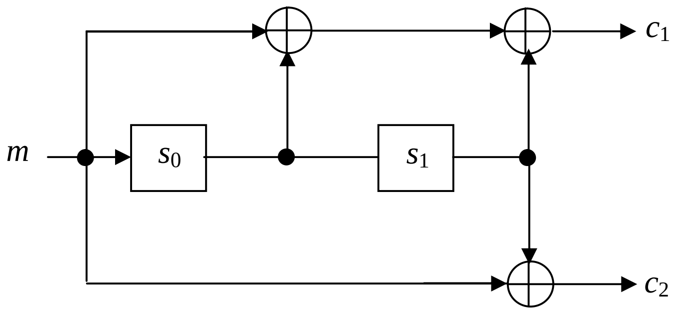

Figure 3 : Circuit logique du codeur de l'exercice 3. **(1 pt)**

4.5- Donner la désignation complète de ce code (n'oublier pas la matrice de transfert en binaire et en octave ainsi que la réponse impulsionnelle).

Code convolutif non-récursif de rendement r=1/2, 2-mémoires, de longueur de contrainte $L=(m+1)\times k=(2+1)\times 1=3$, **(0.5 pt)** de matrice de transfert G et de réponse impulsionelle $H(D)$ telles que :

$$G=\begin{pmatrix}111 & 101\end{pmatrix}_2=\begin{pmatrix}7 & 5\end{pmatrix}_8$$ **(0.5 pt)**

$$H(D)=\begin{pmatrix}1+D+D^2 & 1+D^2\end{pmatrix}$$ **(0.25 pt)**

De distance de Hamming correspondante au chemin (voir le treillis de code):

11 10 11

Soit :

d = 5 **(0.25 pt)**