GEL-7064 : Théorie et pratique des codes correcteurs
Codes convolutifs
Notes de cours

Jean-Yves Chouinard

Département de génie électrique et de génie informatique
Université Laval
`jean-yves.chouinard@gel.ulaval.ca`

19 mars 2013

Plan de la présentation

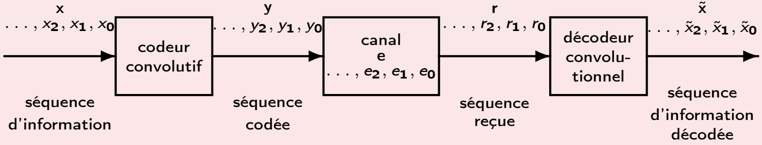
Introduction

Les codes convolutifs diffèrent des codes blocs en ce qu'ils forment des mot-codes, ou *séquences codées*, en fonction de l'information présente (message présent) et de l'information précédente (messages précédents), c'est-à-dire en fonction d'une *séquence d'information*.

Les techniques de construction des codes convolutifs sont de nature *heuristique*, contrairement aux méthodes algébriques et combinatoires utilisées dans la construction des codes blocs.

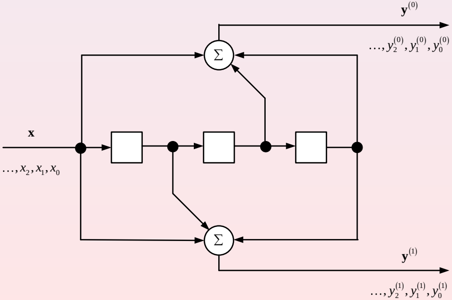
Codeur convolutif et décodeur dans un canal de transmission bruité

La figure ci-dessous montre un codeur et un décodeur convolutifs ou la séquence d'information $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ est convertie en une séquence codée $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, \ldots)$. Les effets perturbateurs du canal de transmission sont modélisés à l'aide d'une séquence d'erreur $\mathbf{e} = (e_0, e_1, e_2, \ldots)$. Au récepteur, le décodeur estime la séquence d'information (ou message) transmise, $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots)$, de la séquence codée reçue $\mathbf{r} = (r_0, r_1, r_2, \ldots)$.



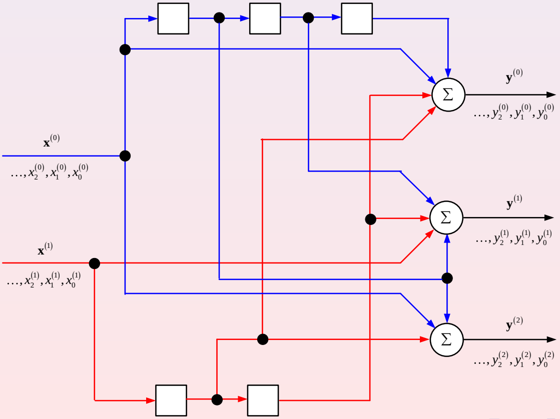
Exemple (code convolutif de rendement $R = \frac{1}{2}$)

La figure ci-dessous montre un codeur convolutif. La séquence d'information $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ est convertie en deux séquences codées $\mathbf{y}^{(0)} = (y_0^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots)$ et $\mathbf{y}^{(1)} = (y_0^{(1)}, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots)$. et son rendement $R = \frac{k}{n} = \frac{1}{2}$.



Exemple (code convolutif de rendement $R = \frac{2}{3}$)

La figure ci-dessous montre un codeur de rendement $R = \frac{k}{n} = \frac{2}{3}$.



Exemple (code convolutif de rendement $R = \frac{2}{3}$)

La séquence d'information $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ est décomposée à l'aide d'un convertisseur série-parallèle en deux séquences :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(0)} &= (x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots)\\ \mathbf{x}^{(1)} &= (x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots)\end{aligned}$$

ou encore : $\mathbf{x} = (x_0^{(0)}, x_0^{(1)}, x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, x_2^{(1)}, \ldots)$. La séquence de sortie sortie est une combinaison linéaire de l'entrée :

$$\begin{aligned}\mathbf{y}^{(0)} &= (y_0^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots)\\ \mathbf{y}^{(1)} &= (y_0^{(1)}, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots)\\ \mathbf{y}^{(2)} &= (y_0^{(2)}, y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots)\end{aligned}$$

c'est-à-dire : $\mathbf{y} = (y_0^{(0)}, y_0^{(1)}, y_0^{(2)}, y_1^{(0)}, y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, y_2^{(0)}, y_2^{(1)}, y_2^{(2)}, \ldots)$.

Codeur convolutif et décodeur dans un canal de transmission bruité

Dans le cas général, un codeur convolutif code k séquences d'information :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(0)} &= (x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots)\\ \vdots &= \vdots \\ \mathbf{x}^{(k-1)} &= (x_0^{(k-1)}, x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \ldots)\end{aligned}$$

en n séquences codées :

$$\begin{aligned}\mathbf{y}^{(0)} &= (y_0^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots)\\ \vdots &= \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)} &= (y_0^{(n-1)}, y_1^{(n-1)}, y_2^{(n-1)}, \ldots)\end{aligned}$$

à l'aide des k registres à décalage de longueur : $m_0, m_1, \ldots, m_{k-1}$.

Codeur convolutif et décodeur dans un canal de transmission bruité

La *mémoire totale* M d'un codeur convolutif est donnée par :

$$\boxed{M = \sum_{i=0}^{k-1} m_i}$$

La *longueur de contrainte* est égale au nombre maximal de bits de sortie pouvant être affectés par un bit à l'entrée d'un codeur convolutif :

$$\boxed{K = \max_{i=0,\ldots,k-1} [1 + m_i] = 1 + \max_{i=0,\ldots,k-1} m_i}$$

Séquences génératrices

Dans les codes convolutifs, les bits des séquences, $\mathbf{y}^{(0)}, \ldots, \mathbf{y}^{(n-1)}$, à la sortie du codeur sont des combinaisons linéaires des bits de la séquence d'entrées : $\mathbf{x}^{(0)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k-1)}$. Ainsi, chacune des n sorties du codeur au temps discret j, est une combinaison linéaire des éléments (ou bits) des k séquences d'entrée (à l'entrée et dans les registres à décalages) :

$$\begin{aligned}
y_j^{(0)} &= f_0(x_j^{(0)}, \ldots, x_{j-m_0}^{(0)}, x_j^{(1)}, \ldots, x_{j-m_1}^{(1)}, \ldots, x_j^{(k-1)}, \ldots, x_{j-m_{k-1}}^{(k-1)}) \\
y_j^{(1)} &= f_1(x_j^{(0)}, \ldots, x_{j-m_0}^{(0)}, x_j^{(1)}, \ldots, x_{j-m_1}^{(1)}, \ldots, x_j^{(k-1)}, \ldots, x_{j-m_{k-1}}^{(k-1)}) \\
\vdots &= \vdots \\
y_j^{(n-1)} &= f_{n-1}(x_j^{(0)}, \ldots, x_{j-m_0}^{(0)}, x_j^{(1)}, \ldots, x_{j-m_1}^{(1)}, \ldots, x_j^{(k-1)}, \ldots, x_{j-m_{k-1}}^{(k-1)})
\end{aligned}$$

Exemple (combinaison linéaire pour les codes de rendements $R = \frac{1}{2}$ et $R = \frac{2}{3}$)

Les bits $y_j^{(0)}$ et $y_j^{(1)}$ à la sortie du codeur convolutif de rendement $R = \frac{1}{2}$ à l'instant j est :

$$\begin{aligned} y_j^{(0)} &= x_j^{(0)} + x_{j-2}^{(0)} + x_{j-3}^{(0)} \\ y_j^{(1)} &= x_j^{(0)} + x_{j-1}^{(0)} + x_{j-3}^{(0)} \end{aligned}$$

Exemple (combinaison linéaire pour les codes de rendements $R = \frac{1}{2}$ et $R = \frac{2}{3}$)

Pour le code convolutionnel de rendement $R = \frac{2}{3}$, les trois sorties, au temps j, sont :

$$\begin{aligned}
y_j^{(0)} &= \underbrace{x_j^{(0)} + x_{j-3}^{(0)}}_{\mathbf{x}^{(0)}} + \underbrace{x_{j-1}^{(1)} + x_{j-2}^{(1)}}_{\mathbf{x}^{(1)}} \\
y_j^{(1)} &= \underbrace{x_{j-1}^{(0)} + x_{j-2}^{(0)}}_{\mathbf{x}^{(0)}} + \underbrace{x_j^{(1)} + x_{j-2}^{(1)}}_{\mathbf{x}^{(1)}} \\
y_j^{(2)} &= \underbrace{x_j^{(0)} + x_{j-1}^{(0)}}_{\mathbf{x}^{(0)}} + \underbrace{x_{j-1}^{(1)}}_{\mathbf{x}^{(1)}}
\end{aligned}$$

Matrices génératrices

On peut déterminer pour chaque sortie $j = 0, \ldots, n-1$, une *réponse impulsionnelle* $\mathbf{y}^{(j)}$, en appliquant à l'entrée la séquence $\mathbf{x}^{(i)} = (1, 0, 0, 0, \ldots)$. Par exemple, si on applique à l'entrée du codeur convolutif de rendement $R = \frac{1}{2}$, la séquence $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0, 0, 0, \ldots)$, alors :

$$
\begin{aligned}
y_t^{(0)} &= x_t^{(0)} + x_{t-2}^{(0)} + x_{t-3}^{(0)} \\
y_t^{(1)} &= x_t^{(0)} + x_{t-1}^{(0)} + x_{t-3}^{(0)}
\end{aligned}
$$

que l'on peut exprimer en fonction de séquences génératrices :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{g}^{(0)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{g}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Matrices génératrices

De manière semblable, pour les deux séquences du code convolutif de rendement $R = \frac{2}{3}$, on aura avec les entrées $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0, 0, 0, \ldots)$ et $\mathbf{x}^{(1)} = (0, 0, 0, 0, \ldots)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_0^{(0)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{g}_0^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{g}_0^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et avec $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 0, \ldots)$ et $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 0, 0, 0, \ldots)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1^{(0)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{g}_1^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{g}_1^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matrices génératrices

Tout comme pour un code bloc linéaire avec comme message à l'entrée : $m(x) = 1$, le mot-code sera $c(x) = g(x)$ et par conséquent les séquences génératrices du code convolutif sont, dans le cas d'un codeur convolutionnel simple n'ayant qu'une seule entrée :

$$\mathbf{y}^{(j)} = \mathbf{x} * \mathbf{g}^{(j)}, \qquad (j = 0, \ldots, n-1)$$

où les éléments de la séquence s'expriment par :

$$y_t^{(j)} = \sum_{l=0}^{m-1} x_{t-l} g_l^{(j)}$$

Matrices génératrices

Dans le cas général, on a :

$$\mathbf{y}^{(j)} = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{x}^{(i)} * \mathbf{g}_i^{(j)}, \qquad (j = 0, \ldots, n-1), \qquad \text{avec}$$

$$y_t^{(j)} = \sum_{i=0}^{k-1} \left[\sum_{l=0}^{m_i-1} x_{t-l}^{(i)} g_{i,l}^{(j)} \right]$$

On peut utiliser la notation matricielle :

$$\boxed{\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{G}}$$

Matrices génératrices

La *matrice génératrice* **G** est de la forme :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc}
g_{0,0}^{(0)} & \cdots & g_{0,0}^{(n-1)} & g_{0,1}^{(0)} & \cdots & g_{0,1}^{(n-1)} & & & & \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \\
g_{k-1,0}^{(0)} & \cdots & g_{k-1,0}^{(n-1)} & g_{k-1,1}^{(0)} & \cdots & g_{k-1,1}^{(n-1)} & & & & \\
\hline
 & & & g_{0,0}^{(0)} & \cdots & g_{0,0}^{(n-1)} & & & & \\
 & \mathbf{0} & & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & & \mathbf{0} & \\
 & & & g_{k-1,0}^{(0)} & \cdots & g_{k-1,0}^{(n-1)} & & & & \\
\hline
 & & & & & & & g_{0,1}^{(0)} & \cdots & g_{0,1}^{(n-1)} \\
 & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & & g_{k-1,1}^{(0)} & \cdots & g_{k-1,1}^{(n-1)} \\
\hline
 & & & & & & & g_{0,0}^{(0)} & \cdots & g_{0,0}^{(n-1)} \\
 & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & & g_{k-1,0}^{(0)} & \cdots & g_{k-1,0}^{(n-1)}
\end{array}\right]$$

Exemple (matrice génératrice pour le code de rendement $R = \frac{1}{2}$)

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc|cc|cc}
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right]$$

Par exemple, la séquence d'information $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1, 1)$ sera codée avec la séquence :

$$\mathbf{y} = \mathbf{xG} = (11, 01, 01, 01, 11, 01, 11)$$

Exemple (matrice génératrice pour le code de rendement $R = \frac{2}{3}$)

$$
\mathbf{G} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc|ccc|ccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

La séquence d'information $\mathbf{x} = (11, 10, 11)$ sera codée par :

$$
\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{G} = (111, 011, 000, 000, 000, 100)
$$

Transformée en D

On peut représenter les séquences d'information (message), les séquences codées et la matrice génératrice d'une code convolutif sous forme polynômiale. On utilise comme variable un opérateur de retard D. Ainsi une séquence message peut s'exprimer par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(i)} &= (x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}, \ldots) \qquad \text{avec } i = 0, \ldots, k-1 \\
&\Updownarrow \\
\mathbf{X}^{(i)}(D) &= x_0^{(i)} + x_1^{(i)} D + x_2^{(i)} D^2 + x_3^{(i)} D^3 + \ldots
\end{aligned}$$

alors qu'une séquence codée devient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^{(i)} &= (y_0^{(i)}, y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, y_3^{(i)}, \ldots) \qquad \text{avec } i = 0, \ldots, n-1 \\
&\Updownarrow \\
\mathbf{Y}^{(i)}(D) &= y_0^{(i)} + y_1^{(i)} D + y_2^{(i)} D^2 + y_3^{(i)} D^3 + \ldots
\end{aligned}$$

Transformée en D

Quant à la matrice génératrice (donnée par l'ensemble des réponses impulsionnelles), elle s'écrit :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{g}_j^{(i)} & = & (g_{j0}^{(i)}, g_{j1}^{(i)}, g_{j2}^{(i)}, g_{j3}^{(i)}, \ldots) \qquad \text{avec } i = 0, \ldots, k-1 \text{ et } j = 0, \ldots, n - \\ & \Updownarrow & \\ \mathbf{G}_j^{(i)}(D) & = & g_{j0}^{(i)} + g_{j1}^{(i)} D + g_{j2}^{(i)} D^2 + g_{j3}^{(i)} D^3 + \ldots \end{array}$$

Ainsi le codage convolutif d'une séquence d'information $\mathbf{X}^{(i)}(D)$ est obtenu par :

$$\boxed{\mathbf{Y}^{(i)}(D) = \mathbf{X}(D)\mathbf{G}^{(i)}(D) \qquad i = 0, \ldots, n-1}$$

dans le cas d'un codeur convolutif à entrée simple.

Transformée en D

Dans le cas général (à entrées multiples) par :

$$\boxed{\mathbf{Y}^{(i)}(D) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(0)}(D) & \mathbf{X}^{(1)}(D) & \ldots & \mathbf{X}^{(k-1)}(D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_0^{(i)}(D) \\ \mathbf{G}_1^{(i)}(D) \\ \vdots \\ \mathbf{G}_{k-1}^{(i)}(D) \end{bmatrix} \qquad i = 0, \ldots, n-1}$$

ou encore :

$$\boxed{\mathbf{Y}(D) = \mathbf{X}(D)\mathbf{G}(D)}$$

c'est-à-dire :

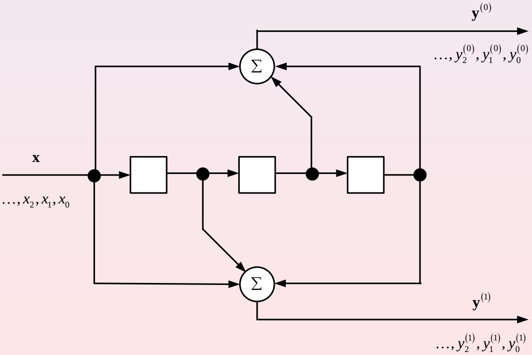
$$\boxed{\mathbf{Y}(D) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(0)}(D) & \mathbf{X}^{(1)}(D) & \ldots & \mathbf{X}^{(k-1)}(D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_0^{(0)}(D) & \mathbf{G}_0^{(1)}(D) & \ldots & \mathbf{G}_0^{(n-1)}(D) \\ \mathbf{G}_1^{(0)}(D) & \mathbf{G}_1^{(1)}(D) & \ldots & \mathbf{G}_1^{(n-1)}(D) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{k-1}^{(0)}(D) & \mathbf{G}_{k-1}^{(1)}(D) & \ldots & \mathbf{G}_{k-1}^{(n-1)}(D) \end{bmatrix}}$$

Diagramme d'états

On peut illustrer le fonctionnement d'un codeur convolutif à l'aide d'un *diagramme d'état* où les 2^M états représentent le contenu de la mémoire du codeur et les transitions entre les états $S_i \rightarrow S_j$ sont déterminées par les bits de la séquence d'information $\mathbf{x}$. La séquence des transitions indique également la séquence codée.

Exemple (Diagramme d'état)

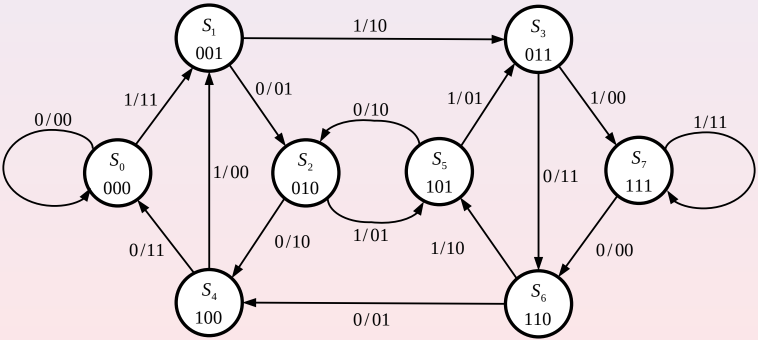
La figure ci-dessous montre un codeur convolutif de rendement $R = \frac{1}{2}$.



Exemple (Diagramme d'état)

Sa mémoire étant de $M = 3$ cellules, son diagramme d'état comprendra $2^3 = 8$ états. Les bits d'information étant appliqué à l'entrée du codeur, un à la fois, il en résulte deux transitions possibles à chaque instant. À chaque transition corresponds aussi 2 bits codés. La figure de la page suivante montre les diagramme d'états avec ses transitions ainsi que les bits d'information et les bits codés.

Exemple (Diagramme d'état)



Définition (code catastrophique)

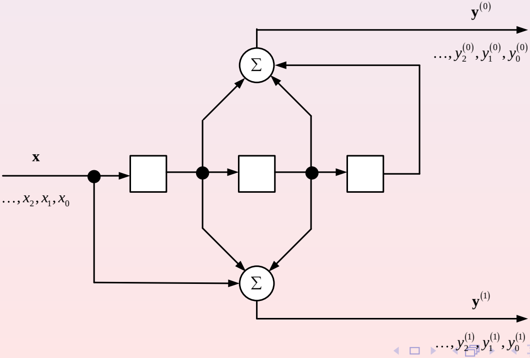
Lorsque l'on code de l'information avec certains codeurs convolutifs, il est possible qu'un nombre fini d'erreurs dans le canal de transmission se traduise par un nombre infini de bits d'information en erreur au décodeur, causant ainsi un situation de propagation d'erreurs *catastrophique*.

Définition *(code catastrophique) :*
Un code convolutif est dit *code catastrophique* si son diagramme d'état comprends une *boucle* pour laquelle une séquence d'information non nulle corresponds à une séquence de sortie (codée) de zéros uniquement.

Exemple (code convolutif catastrophique)

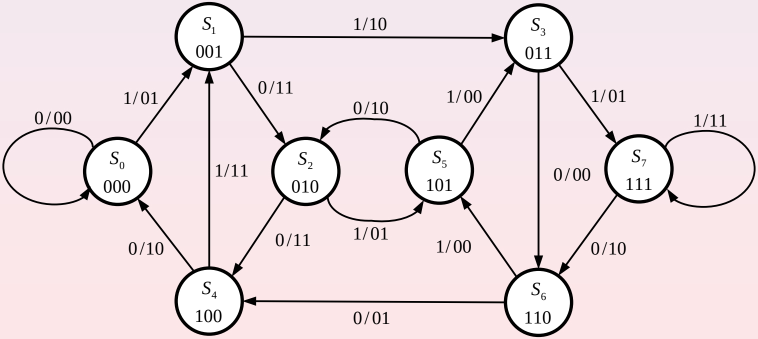
La figure montre un codeur convolutif de rendement $R = \frac{1}{2}$. La réponse impulsionnelle de ce code est donnée par :

$$\mathbf{g}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{g}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Exemple (code convolutif catastrophique)

Le codeur ayant 3 *cellules*, on peut le représenter par un diagramme d'état à $2^3 = 8$ états :



Exemple (code convolutif catastrophique)

Supposons que l'on transmette la séquence d'information suivante :

$$\mathbf{x} = 0, 0, 1, 1, \underbrace{\underbrace{0, 1, 1}, \underbrace{0, 1, 1}, \underbrace{0, 1, 1}}_{\textit{répétition}}, \ldots$$

alors la séquence codée sera :

$$\mathbf{y} = 00, 00, 01, 10, \underbrace{\underbrace{00, 00, 00}, \underbrace{00, 00, 00}, \underbrace{00, 00, 00}}_{\textit{répétition}}, \ldots$$

et la séquence des états du codeur convolutif sera :

$$\mathbf{S} = \underbrace{S_0}_{\textit{état initial}}, S_0, S_0, S_1, \underbrace{\underbrace{S_3, S_6, S_5}, \underbrace{S_3, S_6, S_5}, \underbrace{S_3, S_6, S_5}}_{\textit{répétition}}, \ldots$$

Exemple (code convolutif catastrophique)

Supposons que le canal de transmission introduise les erreurs suivantes :

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
\mathbf{y} = & 00, & 00, & 01, & 10, & 00, & 00, & 00, & 00, & 00, & 00, & 00, & 00, & 00, & \ldots \\
\mathbf{e} = & 00, & 00, & 00, & 00, & 00, & 01, & 10, & 00, & 00, & 00, & 00, & 00, & 00, & \ldots \\
\mathbf{r} = & 00, & 00, & 01, & 10, & 00, & 01, & 10, & 00, & 00, & 00, & 00, & 00, & 00, & \ldots
\end{array}
$$

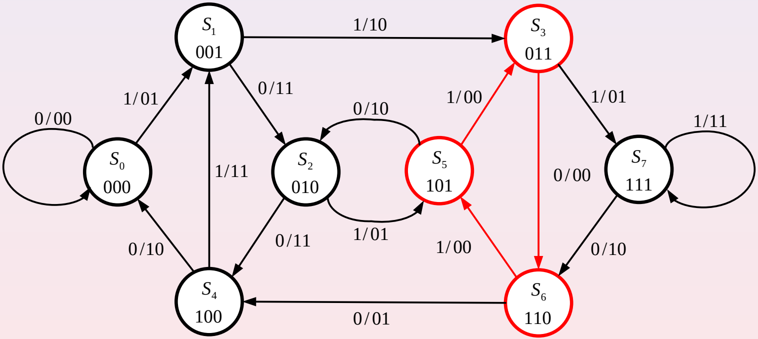
La séquence d'états correspondant à la séquence reçue est :

$$\mathbf{S} \quad = \quad S_0, S_0, S_0, S_1, S_3, S_6, S_4, S_0, S_0, S_0, S_0, S_0, S_0, \ldots$$

et la séquence d'information décodée par ce décodeur sera :

$$\mathbf{x} \quad = \quad 0, 0, 1, 1, 0, \underbrace{0, 0}_{\uparrow}, 0, \underbrace{0, 0}_{\uparrow}, 0, \underbrace{0, 0}_{\uparrow}, \ldots$$

Exemple (code convolutif catastrophique)



Donc, le nombre fini d'erreurs causées par le canal (deux erreurs de transmission) se traduit par un nombre infini (potentiellement) d'erreurs dans la séquence d'information décodée. Le codeur convolutif est donc un codeur catastrophique.

Théorème (code catastrophique)

Théorème *(code catastrophique) :*
Un code convolutif de rendement $R = \frac{1}{n}$ de fonction de transfert $\mathbf{G}(D)$ *n'est pas catastrophique* si et seulement si :

$$\boxed{PGCD\left[\mathbf{G}^{(0)}(D), \mathbf{G}^{(1)}(D), \ldots, \mathbf{G}^{(n-1)}(D)\right] = D^l}$$

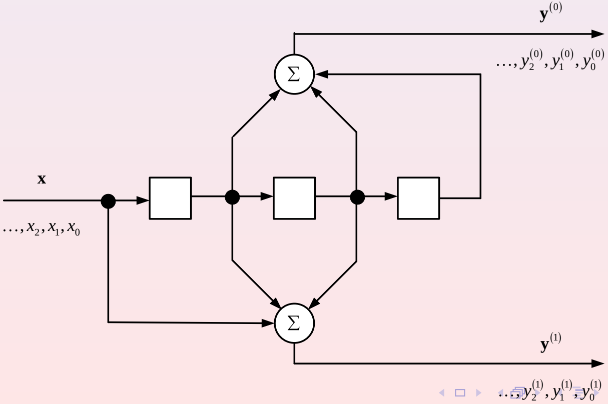
où l est un entier positif.
Dans le cas général, un code convolutif de rendement $R = \frac{k}{n}$ ne sera pas catastrophique si et seulement si :

$$\boxed{PGCD\left[\Delta_1(D), \Delta_2(D), \ldots, \Delta_i(D), \ldots, , \Delta_{\binom{n}{k}}(D)\right] = D^l}$$

où $\Delta_i(D)$ est le déterminant du la $i-\mathrm{eme}$ sous-matrice de dimension $k \times k$ de $\mathbf{G}(D)$.

Exemple 1 (code convolutif catastrophique)

Reprenons l'exemple du code convolutif catastrophique de rendement $R = \frac{1}{2}$:



Exemple 1 (code convolutif catastrophique)

Sa réponse impulsionnelle :

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^{(0)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\\ \mathbf{g}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

peut s'exprimer avec sa transformée en D :

$$\begin{aligned}\mathbf{G}^{(0)}(D) &= D + D^2 + D^3\\ \mathbf{G}^{(1)}(D) &= 1 + D + D^2\end{aligned}$$

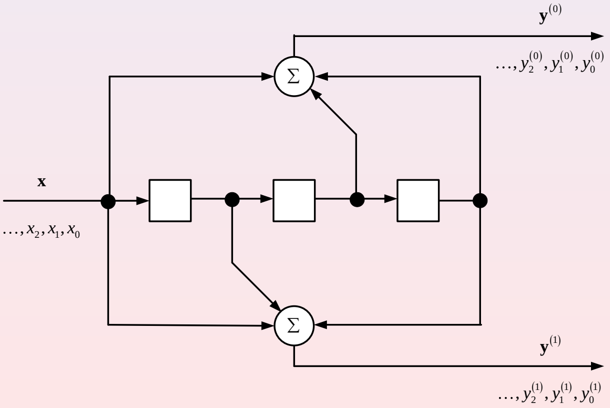
Le plus grand commun diviseur est égal à $\mathbf{G}^{(1)}(D)$ car il divise $\mathbf{G}^{(0)}(D)$:

$$\begin{aligned}PGCD\left[\mathbf{G}^{(0)}(D), \mathbf{G}^{(1)}(D)\right] &= PGCD\left[D + D^2 + D^3, 1 + D + D^2\right]\\ PGCD\left[\mathbf{G}^{(0)}(D), \mathbf{G}^{(1)}(D)\right] &= 1 + D + D^2\end{aligned}$$

qui n'est pas de la forme D^l. Le code est donc un code convolutif catastrophique.

Exemple 2 (code convolutif catastrophique)

Considérons maintenant le code convolutif de rendement $R = \frac{1}{2}$:



Exemple 2 (code convolutif catastrophique)

Sa réponse impulsionnelle et sa représentation sous forme polynômiale sont données par :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{(0)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{g}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{(0)}(D) &= 1 + D^2 + D^3 \\ \mathbf{G}^{(1)}(D) &= 1 + D + D^3 \end{aligned}$$

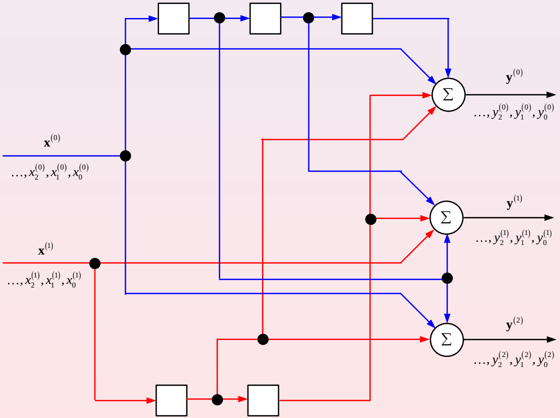
Leur plus grand commun diviseur est :

$$PGCD\left[1 + D^2 + D^3, 1 + D + D^3\right] = 1 = D^0$$

qui est de la forme D^l. Ce code convolutif n'est donc pas catastrophique.

Exemple 3 (code convolutif catastrophique)

Enfin, considérons le code convolutif de rendement $R = \frac{2}{3}$:



Exemple 3 (code convolutif catastrophique)

Ses deux réponses impulsionnelles (pour chacune de deux entrées sont :

$$\begin{array}{lll} \mathbf{g}_0^{(0)} = (\,1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1\,); & \mathbf{g}_0^{(1)} = (\,0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0\,); & \mathbf{g}_0^{(2)} = (\,1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0\,) \\ \mathbf{g}_1^{(0)} = (\,0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0\,); & \mathbf{g}_1^{(1)} = (\,1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0\,); & \mathbf{g}_1^{(2)} = (\,0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0\,) \end{array}$$

La matrice génératrice du code convolutif $\mathbf{G}(D)$ est définie par les six réponses impulsionnelles :

$$\mathbf{G}(D) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_0^{(0)}(D) & \mathbf{G}_0^{(1)}(D) & \mathbf{G}_0^{(2)}(D) \\ \mathbf{G}_1^{(0)}(D) & \mathbf{G}_1^{(1)}(D) & \mathbf{G}_1^{(2)}(D) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}(D) = \begin{bmatrix} 1 + D^3 & D + D^2 & 1 + D \\ D + D^2 & 1 + D^2 & D \end{bmatrix}$$

Exemple 3 (code convolutif catastrophique)

De cette matrice génératrice 2×3 on forme $\binom{3}{2} = 3$ sous-matrices carrées 2×2 et on calcule leur déterminant :

$$\begin{aligned}
\Delta_1(D) &= \begin{vmatrix} 1+D^3 & D+D^2 \\ D+D^2 & 1+D^2 \end{vmatrix} \\
\Delta_1(D) &= \left(1+D^3\right)\left(1+D^2\right) - \left(D+D^2\right)\left(D+D^2\right) \\
\Delta_1(D) &= 1+D^2+D^3+D^5+D^2+D^3+D^3+D^4 \\
\Delta_1(D) &= 1+D^3+D^4+D^5 \\
\Delta_2(D) &= \begin{vmatrix} 1+D^3 & 1+D \\ D+D^2 & D \end{vmatrix} \\
\Delta_2(D) &= \left(1+D^3\right)D - (1+D)\left(D+D^2\right) = D+D^4+D+D^2+D^2+D^3 \\
\Delta_2(D) &= D^3+D^4 \\
\Delta_3(D) &= \begin{vmatrix} D+D^2 & 1+D \\ 1+D^2 & D \end{vmatrix} \\
\Delta_3(D) &= \left(D+D^2\right)D - (1+D)\left(1+D^2\right) = D^2+D^3+1+D^2+D+D^3 \\
\Delta_3(D) &= 1+D
\end{aligned}$$

Exemple 3 (code convolutif catastrophique)

Le plus grand commun diviseur des trois déterminants est :

$$
\begin{aligned}
PGCD\left[\Delta_1(D), \Delta_2(D), \Delta_3(D)\right] &= PGCD\left[1 + D^3 + D^4 + D^5, D^3 + D^4, 1 + D\right] \\
PGCD\left[\Delta_1(D), \Delta_2(D), \Delta_3(D)\right] &= D + 1
\end{aligned}
$$

et ce code convolutif est catastrophique.

Introduction

On s'intéresse souvent à l'évolution des séquences codées produites par les codeurs convolutifs. Les fonctions génératrices et les graphes énumérateurs de poids permettent de déterminer le poids des séquences codées et de leur séquence d'information en fonction du diagramme d'état.
La fonction génératrice $T(X, Y)$ est définie par :

$$\boxed{T(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} X^i Y^j}$$

Les coefficients $a_{i,j}$ indiquent le nombre de séquences codées de poids i correspondant à des séquences d'information de poids j.

Introduction

La formule de Mason permet d'évaluer à l'aide de graphes cette fonction génératrice :

$$\boxed{T(X,Y) = \frac{\sum_l F_l \Delta_l}{\Delta}}$$

Le déterminant de graphe Δ est donné par :

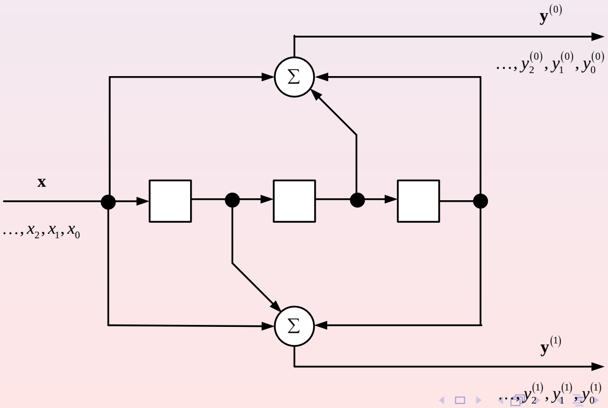
$$\boxed{\Delta = 1 - \sum_{L_l} C_l + \sum_{L_l, L_m} C_l \cdot C_m - \sum_{L_l, L_m, L_n} C_l \cdot C_m \cdot C_n + \ldots}$$

et les co-facteurs des chemins directs dans le graphe sont définis par :

$$\boxed{\Delta_i = 1 - \sum_{K_i, L_l} C_l + \sum_{K_i, L_l, L_m} C_l \cdot C_m - \sum_{K_i, L_l, L_m, L_n} C_l \cdot C_m \cdot C_n + \ldots}$$

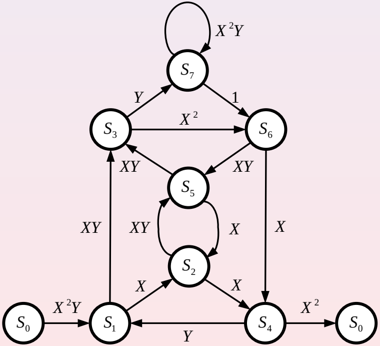
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Nous considérons ici le code convolutif de rendement $R = \frac{1}{2}$ vu précédemment :



Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Pour obtenir son graphe énumérateur de poids, on utilise son diagramme d'état et on sépare l'état S_0 en deux états : un état de départ, S_0 (initial), et un état d'arrivée, S_0 (final), qui nous permettront de former des chemins directs et de co-facteurs en plus des boucles standards.



Exemple (Graphe énumérateur de poids)

On recherche en premier lieu les chemins directs, de S_0 (initial) à S_0 (final), dans le treillis. Il y a 7 chemins directs : $\mathbf{K} = \{K_1, \ldots, K_7\}$ dont les gains sont :

Chemin K_1 : $F_1 = (X^2Y)\cdot(XY)\cdot(Y)\cdot(1)\cdot(XY)\cdot(X)\cdot(X)\cdot(X^2) = X^8Y^4$

Chemin K_2 : $F_2 = (X^2Y)\cdot(XY)\cdot(Y)\cdot(1)\cdot(X)\cdot(X^2) = X^6Y^3$

Chemin K_3 : $F_3 = (X^2Y)\cdot(XY)\cdot(X^2)\cdot(XY)\cdot(X)\cdot(X)\cdot(X^2) = X^{10}Y^3$

Chemin K_4 : $F_4 = (X^2Y)\cdot(XY)\cdot(X^2)\cdot(X)\cdot(X^2) = X^8Y^2$

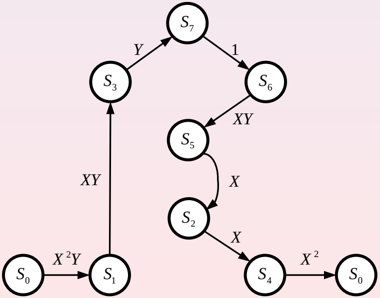
Chemin K_5 : $F_5 = (X^2Y)\cdot(X)\cdot(XY)\cdot(XY)\cdot(Y)\cdot(1)\cdot(X)\cdot(X^2) = X^8Y^4$

Chemin K_6 : $F_6 = (X^2Y)\cdot(X)\cdot(XY)\cdot(XY)\cdot(X^2)\cdot(X)\cdot(X^2) = X^{10}Y^3$

Chemin K_7 : $F_7 = (X^2Y)\cdot(X)\cdot(X)\cdot(X^2) = X^6Y$

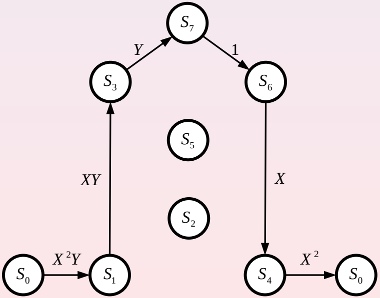
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Chemin K_1 : $F_1 = (X^2Y)\cdot(XY)\cdot(Y)\cdot(1)\cdot(XY)\cdot(X)\cdot(X)\cdot(X^2) = X^8Y^4$



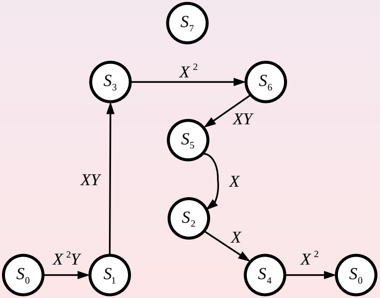
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Chemin K_2 : $F_2 = (X^2Y) \cdot (XY) \cdot (Y) \cdot (1) \cdot (X) \cdot (X^2) = X^6Y^3$



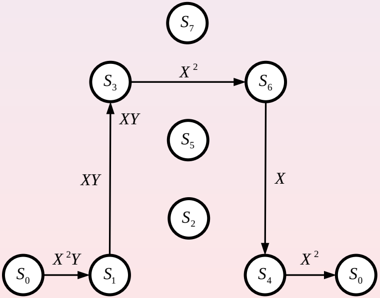
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Chemin K_3 : $F_3 = (X^2Y)\cdot(XY)\cdot(X^2)\cdot(XY)\cdot(X)\cdot(X)\cdot(X^2) = X^{10}Y^3$



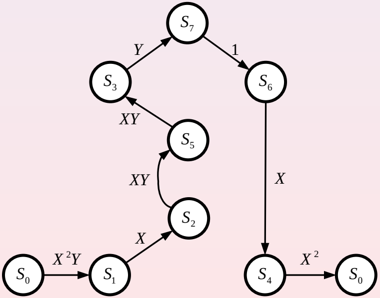
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Chemin K_4 : $F_4 = (X^2 Y) \cdot (XY) \cdot (X^2) \cdot (X) \cdot (X^2) = X^8 Y^2$



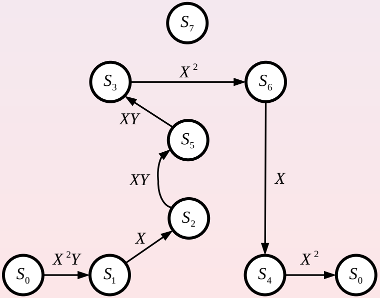
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Chemin K_5 : $F_5 = (X^2Y)\cdot(X)\cdot(XY)\cdot(XY)\cdot(Y)\cdot(1)\cdot(X)\cdot(X^2) = X^8Y^4$



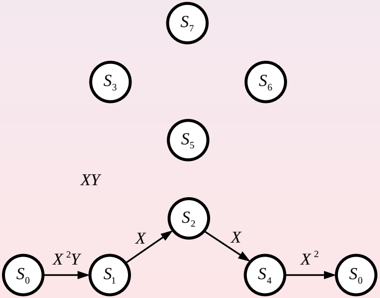
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Chemin K_6 : $F_6 = (X^2Y) \cdot (X) \cdot (XY) \cdot (XY) \cdot (X^2) \cdot (X) \cdot (X^2) = X^{10}Y^3$



Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Chemin K_7 : $F_7 = (X^2Y) \cdot (X) \cdot (X) \cdot (X^2) = X^6Y$



Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Le graphe indique 11 boucles simples : $L = \{C_1, \ldots, C_{11}\}$ de gain :

Boucle L_1 : $C_1 = (XY) \cdot (Y) \cdot (1) \cdot (XY) \cdot (X) \cdot (X) \cdot (Y) = X^4 Y^4$

Boucle L_2 : $C_2 = (XY) \cdot (Y) \cdot (1) \cdot (X) \cdot (Y) = X^2 Y^3$

Boucle L_3 : $C_3 = (XY) \cdot (X^2) \cdot (XY) \cdot (X) \cdot (X) \cdot (Y) = X^6 Y^3$

Boucle L_4 : $C_4 = (XY) \cdot (X^2) \cdot (X) \cdot (Y) = X^4 Y^2$

Boucle L_5 : $C_5 = (X) \cdot (XY) \cdot (XY) \cdot (Y) \cdot (1) \cdot (X) \cdot (Y) = X^4 Y^4$

Boucle L_6 : $C_6 = (X) \cdot (XY) \cdot (XY) \cdot (X^2) \cdot (X) \cdot (Y) = X^6 Y^3$

Boucle L_7 : $C_7 = (X) \cdot (X) \cdot (Y) = X^2 Y$

Boucle L_8 : $C_8 = (XY) \cdot (X) = X^2 Y$

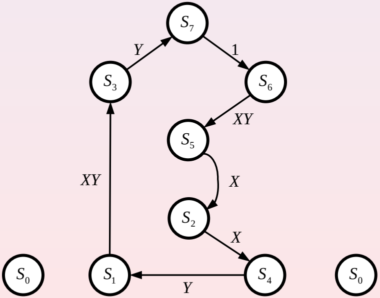
Boucle L_9 : $C_9 = (XY) \cdot (Y) \cdot (1) \cdot (XY) = X^2 Y^3$

Boucle L_{10} : $C_{10} = (XY) \cdot (X^2) \cdot (XY) = X^4 Y^2$

Boucle L_{11} : $C_{11} = X^2 Y$

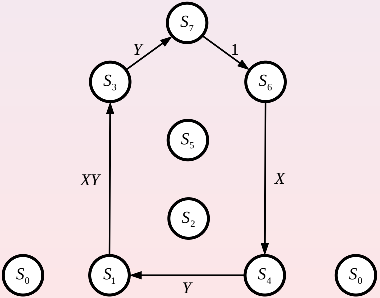
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Boucle L_1 : $C_1 = (XY) \cdot (Y) \cdot (1) \cdot (XY) \cdot (X) \cdot (X) \cdot (Y) = X^4 Y^4$



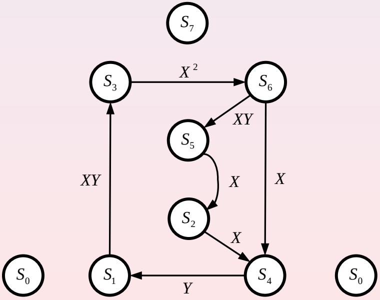
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Boucle L_2 : $C_2 = (XY) \cdot (Y) \cdot (1) \cdot (X) \cdot (Y) = X^2 Y^3$



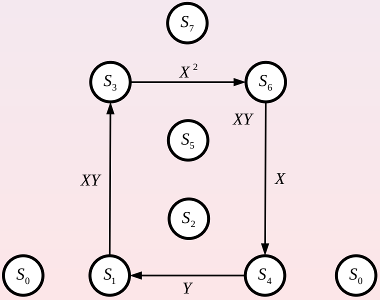
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Boucle L_3 : $C_3 = (XY) \cdot (X^2) \cdot (XY) \cdot (X) \cdot (X) \cdot (Y) = X^6 Y^3$



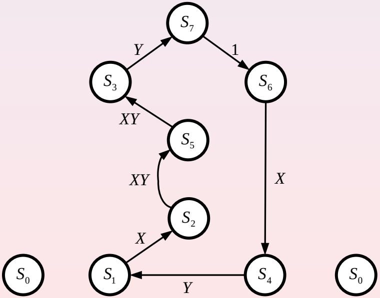
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Boucle L_4 : $C_4 = (XY) \cdot (X^2) \cdot (X) \cdot (Y) = X^4 Y^2$



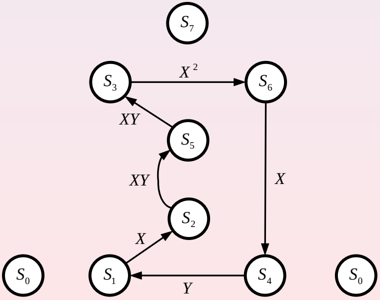
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Boucle L_5 : $C_5 = (X) \cdot (XY) \cdot (XY) \cdot (Y) \cdot (1) \cdot (X) \cdot (Y) = X^4 Y^4$



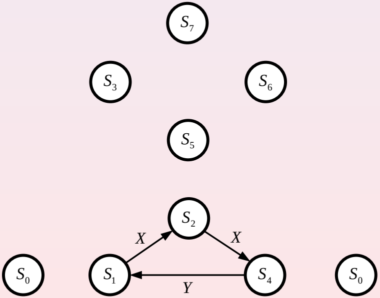
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Boucle L_6 : $C_6 = (X) \cdot (XY) \cdot (XY) \cdot (X^2) \cdot (X) \cdot (Y) = X^6 Y^3$



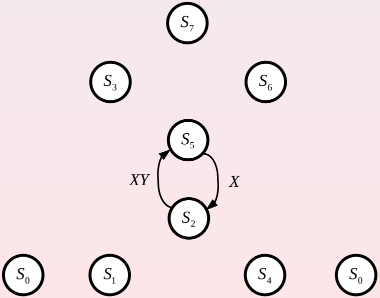
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Boucle L_7 : $C_7 = (X) \cdot (X) \cdot (Y) = X^2 Y$



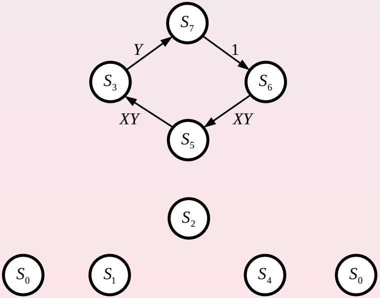
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Boucle L_8 : $C_8 = (XY) \cdot (X) = X^2 Y$



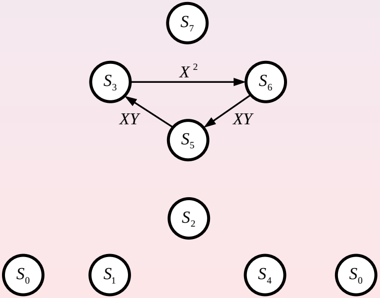
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Boucle L_9 : $C_9 = (XY) \cdot (Y) \cdot (1) \cdot (XY) = X^2 Y^3$



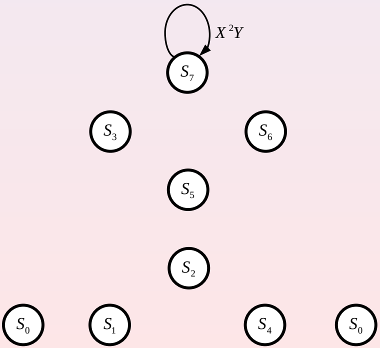
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Boucle L_{10} : $C_{10} = (XY) \cdot (X^2) \cdot (XY) = X^4 Y^2$



Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Boucle L_{11} : $C_{11} = X^2 Y$



Exemple (Graphe énumérateur de poids)

De plus, il y a 10 boucles doubles :

Boucles L_2 et L_8 : $C_2 \cdot C_8 = (X^2Y^3) \cdot (X^2Y) = X^4Y^4$

Boucles L_3 et L_{11} : $C_3 \cdot C_{11} = (X^6Y^3) \cdot (X^2Y) = X^8Y^4$

Boucles L_4 et L_8 : $C_4 \cdot C_8 = (X^4Y^2) \cdot (X^2Y) = X^6Y^3$

Boucles L_4 et L_{11} : $C_4 \cdot C_{11} = (X^4Y^2) \cdot (X^2Y) = X^6Y^3$

Boucles L_6 et L_{11} : $C_6 \cdot C_{11} = (X^6Y^3) \cdot (X^2Y) = X^8Y^4$

Boucles L_7 et L_9 : $C_7 \cdot C_9 = (X^2Y) \cdot (X^2Y^3) = X^4Y^4$

Boucles L_7 et L_{10} : $C_7 \cdot C_{10} = (X^2Y) \cdot (X^4Y^2) = X^6Y^3$

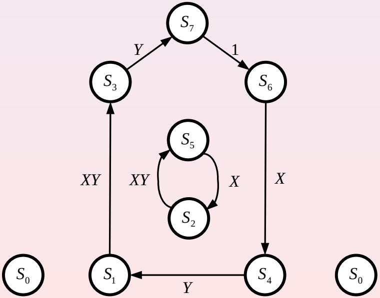
Boucles L_7 et L_{11} : $C_7 \cdot C_{11} = (X^2Y) \cdot (X^2Y) = X^4Y^2$

Boucles L_8 et L_{11} : $C_8 \cdot C_{11} = (X^2Y) \cdot (X^2Y) = X^4Y^2$

Boucles L_{10} et L_{11} : $C_{10} \cdot C_{11} = (X^4Y^2) \cdot (X^2Y) = X^6Y^3$

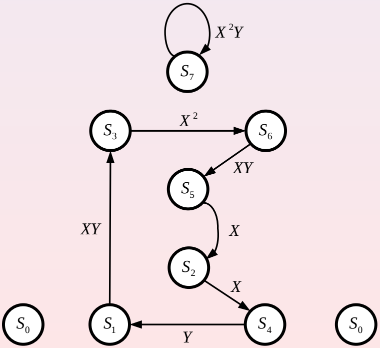
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Boucles L_2 et L_8 : $C_2 \cdot C_8 = (X^2Y^3) \cdot (X^2Y) = X^4Y^4$



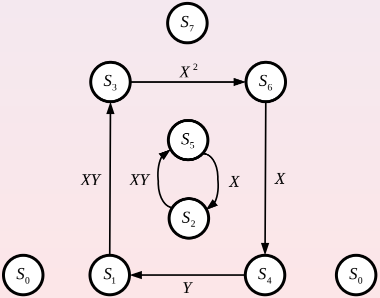
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Boucles L_3 et L_{11} : $C_3 \cdot C_{11} = (X^6 Y^3) \cdot (X^2 Y) = X^8 Y^4$



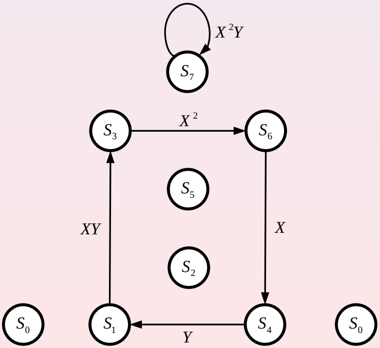
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Boucles L_4 et L_8 : $C_4 \cdot C_8 = (X^4 Y^2) \cdot (X^2 Y) = X^6 Y^3$



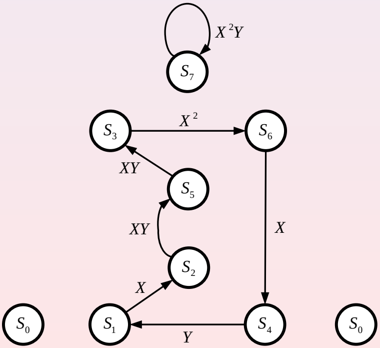
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Boucles L_4 et L_{11} : $C_4 \cdot C_{11} = (X^4 Y^2) \cdot (X^2 Y) = X^6 Y^3$



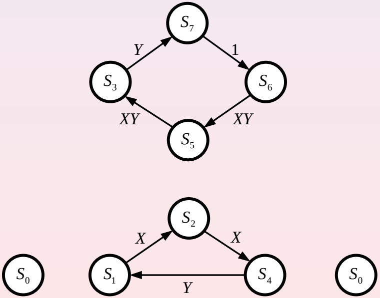
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Boucles L_6 et L_{11} : $C_6 \cdot C_{11} = (X^6 Y^3) \cdot (X^2 Y) = X^8 Y^4$



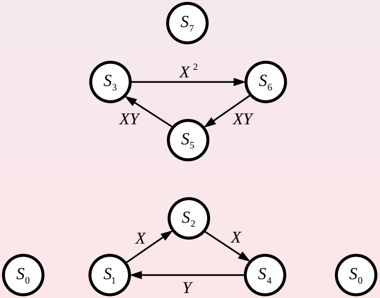
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Boucles L_7 et L_9 : $C_7 \cdot C_9 = (X^2Y) \cdot (X^2Y^3) = X^4Y^4$



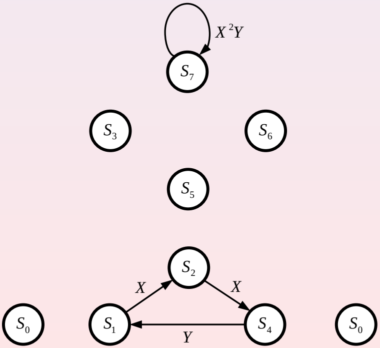
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Boucles L_7 et L_{10} : $C_7 \cdot C_{10} = (X^2Y) \cdot (X^4Y^2) = X^6Y^3$



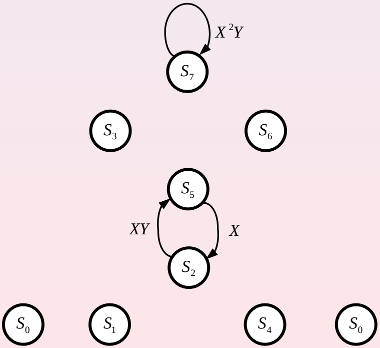
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Boucles L_7 et L_{11} : $C_7 \cdot C_{11} = (X^2 Y) \cdot (X^2 Y) = X^4 Y^2$



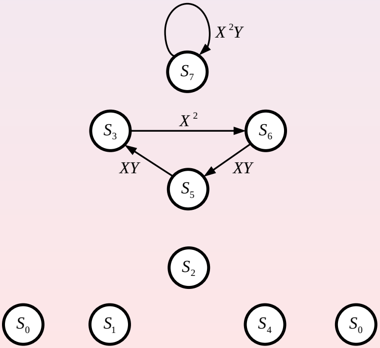
Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Boucles L_8 et L_{11} : $C_8 \cdot C_{11} = (X^2Y) \cdot (X^2Y) = X^4Y^2$



Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Boucles L_{10} et L_{11} : $C_{10} \cdot C_{11} = (X^4 Y^2) \cdot (X^2 Y) = X^6 Y^3$



Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Enfin, il y a deux boucles triples mais il n'y a pas de boucles quadruples.

Boucles L_4, L_8 et L_{11} :

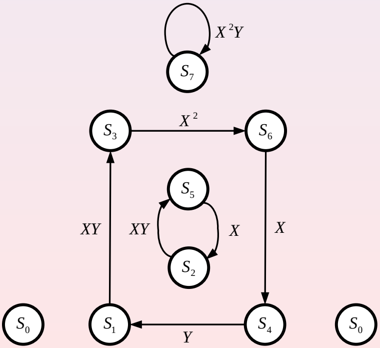
$$C_4 \cdot C_8 \cdot C_{11} = (X^4 Y^2) \cdot (X^2 Y) \cdot (X^2 Y) = X^8 Y^4$$

Boucles L_7, L_{10} et L_{11} :

$$C_7 \cdot C_{10} \cdot C_{11} = (X^2 Y) \cdot (X^4 Y^2) \cdot (X^2 Y) = X^8 Y^4$$

Exemple (Graphe énumérateur de poids)

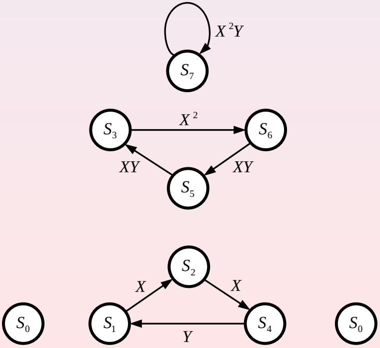
Boucles L_4, L_8 et L_{11} : $C_4 \cdot C_8 \cdot C_{11} = (X^4Y^2) \cdot (X^2Y) \cdot (X^2Y) = X^8Y^4$



Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Boucles L_7, L_{10} et L_{11} :

$$C_7 \cdot C_{10} \cdot C_{11} = (X^2Y) \cdot (X^4Y^2) \cdot (X^2Y) = X^8Y^4$$



Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Le déterminant du graphe est :

$$\Delta = 1 - \sum_{L_l} C_l + \sum_{L_l, L_m} C_l \cdot C_m - \sum_{L_l, L_m, L_n} C_l \cdot C_m \cdot C_n$$

$$\Delta = 1 - (X^4Y^4 + X^2Y^3 + X^6Y^3 + X^4Y^2 + X^4Y^4 + X^6Y^3 + X^2Y + X^2Y + X^2Y^3 + X^4Y^2 + X^2Y) + (X^4Y^4 + X^8Y^4 + X^6Y^3 + X^6Y^3 + X^8Y^4 + X^4Y^4 + X^6Y^3 + X^4Y^2 + X^4Y^2 + X^6Y^3) - (X^8Y^4 + X^8Y^4)$$

$$\Delta = 1 - 2X^2Y^3 - 3X^2Y + 2X^6Y^3$$

et les co-facteurs sont :

$$\Delta_i = 1 - \sum_{K_i, L_l} C_l + \sum_{K_i, L_l, L_m} C_l \cdot C_m - \sum_{K_i, L_l, L_m, L_n} C_l \cdot C_m \cdot C_n$$

Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Les co-facteurs $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_7\}$ des chemins directs sont obtenus en notant la séquence d'états des chemins directs. Ainsi, les chemins directs K_1 et K_5 passant par l'ensemble des états, il s'ensuit que leur co-facteur est unitaire (il n'y a pas de boucles qui n'y touchent pas), et donc $\Delta_1 = \Delta_5 = 1$. Les chemins K_3 et K_6 ne touchent pas l'état S_7 et donc la boucle L_{11} de gain $C_{11} = X^2 Y$, donnant un co-facteur $\Delta_3 = \Delta_6 = 1 - C_{11} = 1 - X^2 Y$. De même, le chemin K_2 ne touche pas la boucle L_8 de gain $C_8 = X^2 Y$. Le chemin K_4 ne touche pas les boucles L_8 et L_{11}, qui elles-mêmes ne se touchent pas. Enfin, le chemin K_7 ne touche pas les boucles L_9, L_{10} et L_{11} alors que les boucles L_{10} et L_{11} ne se touchent pas.

Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Les co-facteurs sont :

co-facteur Δ_1 : $\Delta_1 = 1$

co-facteur Δ_2 : $\Delta_2 = 1 - C_8 = 1 - X^2Y$

co-facteur Δ_3 : $\Delta_3 = 1 - C_{11} = 1 - X^2Y$

co-facteur Δ_4 : $\Delta_4 = 1 - (C_8 + C_{11}) + (C_8C_{11}) = 1 - 2X^2Y + X^4Y^2$

co-facteur Δ_5 : $\Delta_5 = 1$

co-facteur Δ_6 : $\Delta_6 = 1 - C_{11} = 1 - X^2Y$

co-facteur Δ_7 : $\Delta_7 = 1 - (C_9 + C_{10} + C_{11}) + (C_{10}C_{11}) =$
$1 - (X^2Y^3 + X^4Y^2 + X^2Y) + X^6Y^3$

Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Le terme $\sum_l F_l \Delta_l$ de la fonction génératrice $T(X, Y)$ (formule de Mason), ou de l'énumérateur de poids, est donné par :

$$\sum_{l=1}^{7} F_l \Delta_l = F_1\Delta_1 + F_2\Delta_2 + F_3\Delta_3 + F_4\Delta_4 + F_5\Delta_5 + F_6\Delta_6 + F_7\Delta_7$$

$$\sum_{l=1}^{7} F_l \Delta_l = \left[X^8 Y^4 \cdot \Delta_1\right] + \left[X^6 Y^3 \cdot \Delta_2\right] + \left[X^{10} Y^3 \cdot \Delta_3\right] + \left[X^8 Y^2 \cdot \Delta_4\right] + \left[X^8 Y^4 \cdot \Delta_5\right] + \left[X^{10} Y^3 \cdot \Delta_6\right] + \left[X^6 Y \cdot \Delta_7\right]$$

$$\sum_{l=1}^{7} F_l \Delta_l = \left[X^8 Y^4 \cdot 1\right] + \left[X^6 Y^3 \cdot (1 - X^2 Y)\right] + \left[X^{10} Y^3 \cdot (1 - X^2 Y)\right] + \left[X^8 Y^2 \cdot (1 - 2X^2 Y + X^4 Y^2)\right] + \left[X^8 Y^4 \cdot 1\right] + \left[X^{10} Y^3 \cdot (1 - X^2 Y)\right] + \left[X^6 Y \cdot (1 - (X^2 Y^3 + X^4 Y^2 + X^2 Y) + X^6 Y^3])\right]$$

$$\sum_{l=1}^{7} F_l \Delta_l = X^6 Y^3 - X^{10} Y^3 + X^6 Y$$

Exemple (Graphe énumérateur de poids)

La fonction génératrice obtenue du graphe énumérateur de poids est :

$$
\begin{aligned}
T(X,Y) &= \frac{\sum_{l=1}^{7} F_l \Delta_l}{\Delta} \\
T(X,Y) &= \frac{X^6Y^3 - X^{10}Y^3 + X^6Y}{1 - 2X^2Y^3 - 3X^2Y + 2X^6Y^3} \\
T(X,Y) &= X^6Y + X^6Y^3 + 3X^8Y^2 + 5X^8Y^4 + 2X^8Y^6 + \\
&\quad 8X^{10}Y^3 + 21X^{10}Y^5 + 16X^{10}Y^7 + 4X^{10}Y^9 + \ldots \\
T(X,Y) &= X^6(Y + Y^3) + X^8(3Y^2 + 5Y^4 + 2Y^6) + \\
&\quad X^{10}(8Y^3 + 21Y^5 + 16Y^7 + 4Y^9) + \ldots
\end{aligned}
$$

Exemple (Graphe énumérateur de poids)

Le graphe énumérateur de poids et la fonction génératrice indique donc qu'il le codeur convolutif peut produire :

X^6Y : une séquence codée de poids 6 avec une séquence d'information de poids 1,

X^6Y^3 : une autre séquence codée de poids 6 avec une séquence d'information de poids 3,

$3X^8Y^2$: 3 séquences codées de poids 8 avec des séquences d'information de poids 2,

$5X^8Y^4$: 5 autres séquences codées de poids 8 mais avec des séquences d'information de poids 4,

$2X^8Y^6$: 2 autres séquences codées de poids 8 de poids 6, et ainsi de suite.

E. Biglieri, D. Divsalar, P.J. McLane, and M.K. Simon.
Introduction to Trellis-Coded Modulation with Applications.
Macmillan Publishing Company, New-York, 1991.

A. Dholakia.
Introduction to Convolutional Codes with Applications.
Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts, 1994.

R.G. Gallager.
Information Theory and Reliable Communications.
John Wiley and Sons, New-York, 1968.

Y. Jiang.
A Practical Guide to Error-Control Coding Using MATLAB.
Artech House, Norwood, Ma, 2010.

S. Lin and D.J. Costello.
Error Control Coding : Fundamentals and Applications.
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey, second edition, 2004.

T.K. Moon.
Error Correction Coding : Mathematical Methods and Algorithms.
Wiley-Interscience, Hoboken, New-Jersey, 2005.

W.E. Ryan and S. Lin.
Channel Codes : Classical and Modern.
Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2009.

A.J. Viterbi and J.K. Omura.
Principles of Digital Communication and Coding.
McGraw-Hill, New-York, 1979.

S.B. Wicker.
Error Control Systems for Digital Communication and Storage.
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey, 1995.