Vibrations et Ondes

Partie 1 (Vibrations)

Chapitre II

Systèmes Linéaires Libres à un Seul Degré de Liberté

Formules d'Approximation

Pour $q \ll 1 : f(q) \approx f(0) + qf'(0) + \dfrac{q^2}{2} f''(0) + \mathcal{O}\left[q^3\right]$.

Pour $\delta \ll 1 : f(q_0+\delta) \approx f(q_0) + \delta f'(q_0) + \dfrac{\delta^2}{2} f''(q_0) + \mathcal{O}\left[\delta^3\right]$.

Application: Pour $x \ll 1 : (1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$. $\quad \sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \dfrac{1}{2}x$. $\quad \dfrac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x$.

Pour $\theta \ll 1 :$ $\quad \sin\theta \approx \theta$. $\quad \cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$.

Pour $\varphi \ll 1 : \sin(\theta_0 + \varphi) \approx \sin\theta_0 + \varphi\cos\theta_0 - \left(\varphi^2/2\right)\sin\theta_0$.

$: \cos(\theta_0 + \varphi) \approx \cos\theta_0 - \varphi\sin\theta_0 - \left(\varphi^2/2\right)\cos\theta_0$.

Energie Cinétique

Translation

$$T = \frac{1}{2}mv^2.$$

Rotation

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2.$$

Energie Potentielle

Ascension

$$U_{masse} = mgh.$$

Descente

$$U_{masse} = -mgh.$$

Compression ou dilatation

$$U_{ressort} = \frac{1}{2}kx^2.$$

Energie Mécanique (totale)

$E = T + U$. *Système libre non amorti:* $\dfrac{dE}{dt} = 0$.

Condition d'Équilibre

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q}\right|_{q=q_0} = 0.$$

Equilibre stable

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|_{q=q_0} > 0.$$

(q *peut être*: $x, \theta, ...$)

Equilibre instable

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|_{q=q_0} < 0.$$

PFD (Principe Fondamental de la Dynamique)

$$\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}.$$

TMC (Théorème du Moment Cinétique)

$$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{L}. \qquad (\overrightarrow{L} = I\overrightarrow{\omega})$$

Lagrangien

$$\mathcal{L} = T - U.$$

Equation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0.$$

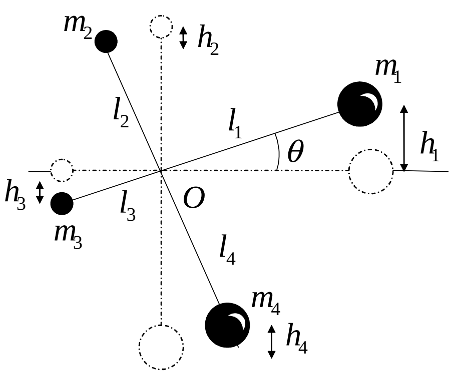
N.B: Pour les circuits électriques c'est la loi des mailles qui est plus souvent utilisée que le Lagrangien

1) Énergie Cinétique et Énergie Potentielle

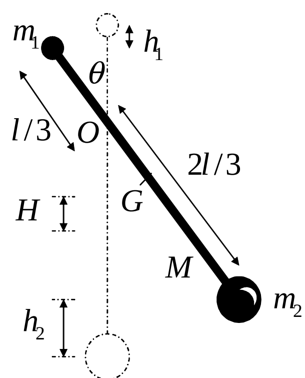
1.1 Les schémas ci-dessous représentent des systèmes en état de mouvement. Les positions initiales sont représentées en pointillé. Une tige en trait gras est massive et homogène tandis qu'une tige en trait fin est négligeable. Les boules noires sont ponctuelles. Les fils sont inextensibles et ne glissent pas sur les disques. On supposera que les ressorts gardent leur directions verticales ou horizontales lors des écartements. Trouver l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle U en fonction de θ pour chacun de ces systèmes.

Rappels

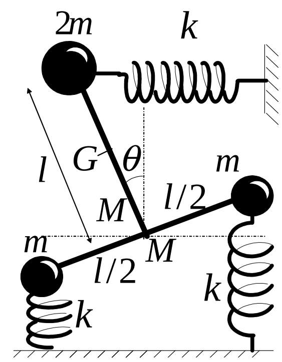
- *Le moment d'inertie d'une tige de masse M et de longueur l autour de son centre de gravité G est:* $I_{/G} = \frac{1}{12}Ml^2$.
- *Le moment d'inertie d'un disque de masse M et de rayon R autour de son centre de gravité G est:* $I_{/G} = \frac{1}{2}MR^2$.
- *Le moment d'inertie d'une tige de masse M et de longueur l autour d'un point O loin de son centre de gravité G d'une distance D est, d'après le théorème de Huygens-Steiner:* $I_{/O} = I_{/G} + M\,(OG)^2 = \frac{1}{12}Ml^2 + MD^2$.



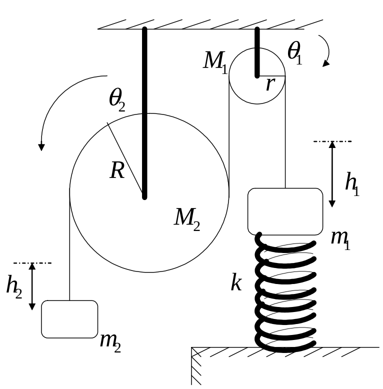
(i)



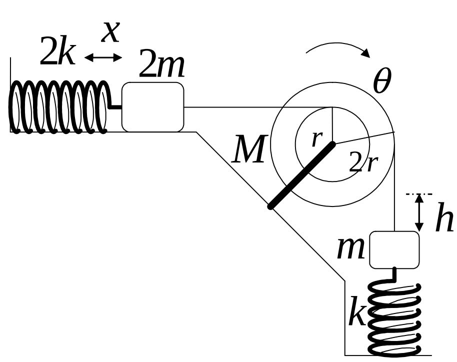
(ii)



(iii)



(iv)



(v)

Solution : Soit T l'énergie cinétique et U l'énergie potentielle.

(i) $T = T_{m_1}+T_{m_2} + T_{m_3} + T_{m_4}=\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \frac{1}{2}m_4v_4^2 = \frac{1}{2}(m_1l_1^2 + m_2l_2^2 + m_3l_3^2 + m_4l_4^2)\ \dot{\theta}^2.$

$U = U_{m_1}+U_{m_2}+U_{m_3}+U_{m_4}= m_1gh_1 - m_2gh_2 - m_3gh_3 + m_4gh_4$

$= g[m_1l_1\sin\theta - m_2(l_2 - l_2\cos\theta) - m_3l_3\sin\theta + m_4(l_4 - l_4\cos\theta)].$

(ii) $T = T_{m_1}+T_{m_2}+T_{tige}=\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I_{/O}\ \dot{\theta}^2$. Le moment d'inertie de la tige au tour de O (d'après le théorème de Huygens): $I_{/O}= I_{/G} + M\,(OG)^2 = \frac{1}{12}Ml^2 + M(\frac{l}{2} - \frac{l}{3})^2 = \frac{1}{9}Ml^2$. Alors:

$T = \frac{1}{2}(m_1\frac{1}{9}l^2 + m_2\frac{4}{9}l^2 + \frac{1}{9}Ml^2)\ \dot{\theta}^2 = \frac{1}{18}(m_1 + 4m_2 + M)l^2\ \dot{\theta}^2.$

$U = U_{m_1}+U_{m_2}+U_{tige}= -m_1gh_1 + m_2gh_2 + MgH$

$= g[-m_1(\frac{1}{3}l - \frac{1}{3}l\cos\theta) + m_2(\frac{2}{3}l - \frac{2}{3}l\cos\theta) + M(\frac{1}{6}l - \frac{1}{6}l\cos\theta)] = \frac{1}{3}g[2m_2 - m_1 + \frac{1}{2}M](l - l\cos\theta).$

(iii) $T = T_m+T_{2m} + T_m + T_{tige1} + T_{tige2} = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}2mv_{2m}^2 + \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}I_1\ \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_2\ \dot{\theta}^2$

$= \frac{1}{2}m(\frac{l}{2}\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}.2m(l\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}m(\frac{l}{2}\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}.\frac{1}{12}Ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}Ml^2+M(\frac{l}{2})^2\right)\ \dot{\theta}^2$

$= \frac{5}{4}[m + \frac{1}{6}M]l^2\ \dot{\theta}^2.$

$U = U_m+U_{2m} + U_m + U_{tige2} + U_{ressort1} + U_{ressort2} + U_{ressort3}$

$= mgh_1 - 2mgh_2 - mgh_3 - MgH+\frac{1}{2}kh_1^2 + \frac{1}{2}kh_2^2 + \frac{1}{2}kh_3^2$

$= g[m\frac{l}{2}\sin\theta - 2m(l - l\cos\theta) - m\frac{l}{2}\sin\theta - M(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\theta)]+\frac{1}{2}(k\frac{l^2}{4} + kl^2 + k\frac{l^2}{4})\sin^2\theta$

$= -g[2m + \frac{1}{2}M](l - l\cos\theta)+\frac{3}{4}kl^2\sin^2\theta.$

(iv) $T = T_{m_1}+T_{m_2} + T_{M_1} + T_{M_2} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2$

$= \frac{1}{2}m_1(r\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(R\dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}M_1r^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}M_2R^2\dot{\theta}_2^2.$

Puisque le fil est inextensible et ne glisse pas sur les disques, nous avons $R\theta_2 = r\theta_1$. Alors,

$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2)r^2\dot{\theta}_1^2$

$U = U_{m1}+U_{m2} + U_{ressort}= -m_1gh_1 - m_2gh_2+\frac{1}{2}kh_1^2$

$= -g(m_1r\theta_1 + m_2R\theta_2)+\frac{1}{2}kr^2\theta_1^2 = -g(m_1 + m_2)r\theta_1+\frac{1}{2}kr^2\theta_1^2.$

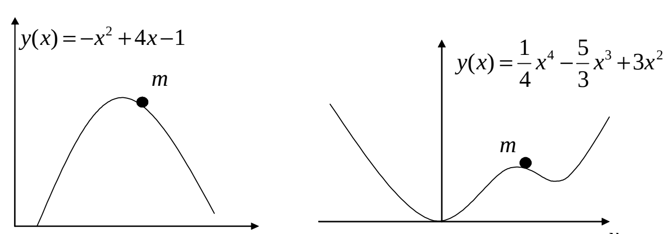
(v) $T = T_m+T_M + T_{2m} = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}I\ \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}.2mv_{2m}^2$

$= \frac{1}{2}m(2r\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}M\,(2r)^2\ \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}.2m(r\dot{\theta})^2 = \dfrac{1}{2}\,(6m + 2M)\,r^2\ \dot{\theta}^2.$

$U = U_m+U_{ressort1} + U_{ressort2}= -mgh+\frac{1}{2}kh^2 + \frac{1}{2}.2kx^2 = -mg\,(2r\theta)+\frac{1}{2}k\,(2r\theta)^2 + k\,(r\theta)^2$

$= -2mgr\theta+3kr^2\theta^2.$

1.2 Trouver l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la masse ponctuelle m glissant le long d'une courbe d'équation $y(x)$ dans chacun des cas ci-contre.



(i) (ii)

Solution : Soit T l'énergie cinétique de la masse et U son énergie potentielle.

(i) $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$. Puisque $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt} = (-2x + 4)\,\dot{x}$, alors

$T = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + \left((-2x + 4)\,\dot{x}\right)^2\right] = \frac{1}{2}m\left(4x^2 - 16x + 17\right)\ \dot{x}^2.$

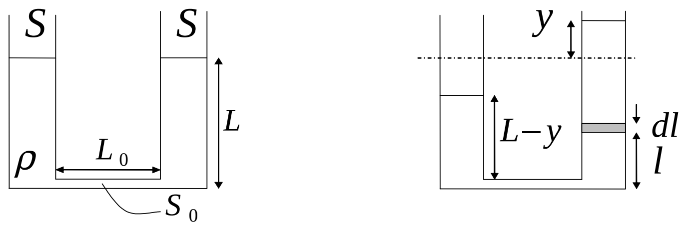
$U = mgh = mgy = mg(-x^2 + 4x - 1).$

(ii) $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$. Puisque $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt} = \left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)\dot{x}$:

$T = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + \left(\left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)\dot{x}\right)^2\right] = \frac{1}{2}m\left[\left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)^2 + 1\right]\dot{x}^2$.

$U = mgh = mgy = mg(\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2)$.

1.3 Trouver, en fonction de la hauteur y l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du liquide dans le tube en forme de U ci-dessous. La densité volumique du liquide est ρ. La longueur initiale des colonnes liquides ainsi que la section de chaque partie du tube sont indiquées sur le schéma.



Au repos *En mouvement*

Solution : Soit T l'énergie cinétique et U l'énergie potentielle.

• Pour trouver l'énergie cinétique du liquide il nous faut l'énergie cinétique de chacune des colonnes liquides. Puisque les parties verticales gauche et droite du tube possèdent la même section S, les colonnes liquides dans ces parties auront la même vitesse $v = \dot{y}$. Puisque la partie horizontale du tube possède une section différente (plus petite) la colonne liquide dans cette partie aura une vitesse différente (plus grande) $v_0 = \dot{y}_0$. Lorsque le liquide de droite monte d'une hauteur dy, il aspire avec lui une colonne liquide horizontale dy_0 telle que $S_0 \mathrm{d}y_0 = S\mathrm{d}y \Rightarrow \mathrm{d}y_0 = \frac{S}{S_0}\mathrm{d}y \Longrightarrow \dot{y}_0 = \frac{S}{S_0}\dot{y}$. Donc,

$T_{gauche} = \frac{1}{2}m_{gauche}\ \dot{y}^2 = \frac{1}{2}\rho S\left(L - y\right)\ \dot{y}^2$.

$T_{droite} = \frac{1}{2}m_{droite}\ \dot{y}^2 = \frac{1}{2}\rho S\left(L + y\right)\ \dot{y}^2$. $\quad\Longrightarrow\quad T = T_g + T_d + T_h = \rho(SL + \frac{L_0 S^2}{2S_0})\ \dot{y}^2$.

$T_{horizontale} = \frac{1}{2}m^2_{horizontale}\dot{y}_0^2 = \frac{1}{2}\rho S_0 L_0 \frac{S^2}{S_0^2}\ \dot{y}^2 = \frac{1}{2}\rho L_0 \frac{S^2}{S_0}\ \dot{y}^2$.

• L'énergie potentielle de la colonne liquide est la somme des énergies potentielles dU=d$m.g.l$=ρSd$l.g.l$ des éléments infinitésimaux dm à la hauteur l.

$U_{gauche} = \int \mathrm{d}U = \int_0^{L-y} \rho S\mathrm{d}l\ g\ l = \frac{1}{2}\rho Sg\left(L - y\right)^2$.

$U_{horizontale} = \mathrm{C}^{te}$. (La colonne horizontale ne change pas de hauteur.) $\Longrightarrow U = U_g + U_d + U_h = \rho Sgy^2 + \mathrm{C}^{te}$.

$U_{droite} = \int \mathrm{d}U = \int_0^{L+y} \rho S\mathrm{d}l\ g\ l = \frac{1}{2}\rho Sg\left(L + y\right)^2$.

(ρSgL^2 est inclus dans C^{te})

2) Condition d'Équilibre, Équilibre Stable, et Équilibre Instable

2.1 Les énergies potentielles obtenues pour chacun des systèmes de l'exercices 1.1 sont les suivantes

(i) $U = g[m_1 l_1 \sin\theta - m_2(l_2 - l_2\cos\theta) - m_3 l_3 \sin\theta + m_4(l_4 - l_4\cos\theta)]$.

(ii) $U = \frac{1}{3}g[2m_2 - m_1 + \frac{1}{2}M](l - l\cos\theta)$.

(iii) $U = -g[2m + \frac{1}{2}M](l - l\cos\theta) + \frac{3}{4}kl^2\sin^2\theta$.

(iv) $U = -g(m_1 + m_2)r\theta_1 + \frac{1}{2}kr^2\theta_1^2$.

(v) $U = -2mgr\theta + 3kr^2\theta^2$.

a) Trouver les positions d'équilibre pour chaque système.

b) Étudier la nature de l'équilibre en $\theta = \pi/2$ du système (i).

c) Trouver la condition d'oscillation des systèmes (ii) et (iii) en $\theta = 0$.

d) Quelle est la nature de l'équilibre des systèmes (iv) et (v).

Solution :

a) La variable étant θ, la condition d'équilibre est $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$.

(i) $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow g\left[m_1 l_1 \cos\theta - m_2 l_2 \sin\theta - m_3 l_3 \cos\theta + m_4 l_4 \sin\theta\right] = 0$

$\Longrightarrow g\cos\theta\left[(m_1 l_1 - m_3 l_3) + (m_4 l_4 - m_2 l_2)\tan\theta\right] = 0$

$\Longrightarrow \cos\theta = 0 (\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2})$, **ou** $\tan\theta = \dfrac{m_3 l_3 - m_1 l_1}{m_4 l_4 - m_2 l_2}$.

(ii) $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{3} g\left[2m_2 - m_1 + \frac{1}{2}M\right] l\sin\theta = 0 \Longrightarrow \sin\theta = 0 \Longrightarrow \theta = \mathbf{0}$.

(iii) $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow = -g\left(2m + \frac{1}{2}M\right) l\sin\theta + \frac{3}{2}kl^2\sin\theta\cos\theta = 0 \Longrightarrow \sin\theta = 0 (\Rightarrow \theta = 0)$, **ou** $\cos\theta = \dfrac{g(4m+M)}{3kl}$.

(iv) $\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = 0 \Longrightarrow -g(m_1 + m_2)r + kr^2\theta_1 = 0 \Longrightarrow \theta_1 = \dfrac{g(m_1+m_2)}{kr}$.

(v) $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow -2mgr + 6kr^2\theta = 0 \Longrightarrow \theta = \dfrac{mg}{3kr}$.

b) Calculons $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$ et vérifions son signe en $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = g\left[-m_1 l_1 \sin\theta - m_2 l_2 \cos\theta + m_3 l_3 \sin\theta + m_4 l_4 \cos\theta\right]_{\theta=\frac{\pi}{2}} = g(m_3 l_3 - m_1 l_1)$.

Si $m_3 l_3 > m_1 l_1$ l'équilibre est **stable**, si $m_3 l_3 < m_1 l_1$ il est **instable**.

c) Pour qu'un système oscille il faut qu'il regagne sa position d'équilibre après chaque écartement, donc la condition d'oscillation d'un système est que l'équilibre soit stable : $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} > 0$:

(ii) $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} > 0 \Longrightarrow \left.\frac{1}{3} g\left[2m_2 - m_1 + \frac{1}{2}M\right] l\cos\theta\right|_{\theta=0} > 0 \Longrightarrow \frac{1}{3} g\left[2m_2 - m_1 + \frac{1}{2}M\right] l > 0$

$\Longrightarrow m_1 < 2m_2 + \frac{1}{2}M$.

(iii) $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} > 0 \Longrightarrow \left.-g\left(2m + \frac{1}{2}M\right) l\cos\theta + \frac{3}{2}kl^2\cos^2\theta - \frac{3}{2}kl^2\sin^2\theta\right|_{\theta=0} > 0$

$\Longrightarrow -g\left(2m + \frac{1}{2}M\right) l + \frac{3}{2}kl^2 > 0$

$\Longrightarrow k > \dfrac{g\,(4m+M)}{3l}$.

d) **(iv)** $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta_1^2}\right|_{\theta_1=\frac{g(m_1+m_2)}{kr}} = kr^2 > 0$: Donc en $\theta_1 = \frac{g(m_1+m_2)}{kr}$ l'équilibre est **stable.**

(v) $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\frac{mg}{3kr}} = 6kr^2 > 0$: Donc en $\theta = \frac{mg}{3kr}$ l'équilibre est **stable**.

2.2 Les énergies potentielles obtenues pour la masse m sur chacune des deux courbes de l'exercices 1.2 sont les suivantes.

(i) $U = mg(-x^2 + 4x - 1)$. **(ii)** $U = mg(\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2)$.

Trouver les positions d'équilibre de la masse et la nature de son équilibre en ces positions pour chaque cas.

Solution : La variable étant x, la condition d'équilibre est $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$.

(i) $\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \Longrightarrow mg(-2x + 4) = 0 \Longrightarrow x = \mathbf{2}$.

La nature de cet équilibre est donnée par le signe de $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ en ce point :

$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=2} = \left. mg(-2)\right|_{x=2} = -2mg < 0$. L'équilibre est donc **instable**.

(ii) $\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \Longrightarrow mg(x^3 - 5x^2 + 6x) = 0 \Longrightarrow mgx(x^2 - 5x + 6) = 0 \Longrightarrow x = \mathbf{0}$, **ou** $x = \mathbf{2}$, **ou** $x = \mathbf{3}$.

La nature de ces équilibres est donnée par le signe de $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ en ces points:

$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left. mg(3x^2 - 10x + 6)\right|_{x=0} = 6mg > 0$: L'équilibre est **stable** en $x = 0$.

$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=2} = \left. mg(3x^2 - 10x + 6)\right|_{x=2} = -2mg < 0$: L'équilibre est **instable** en $x = 2$.

$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=3} = \left. mg(3x^2 - 10x + 6)\right|_{x=3} = 3mg > 0$: L'équilibre est **stable** en $x = 3$.

3) Énergie Mécanique, Équation du Mouvement, et Pulsation Propre

3.1 Les énergies cinétiques et potentielles obtenues pour chacun des systèmes de l'exercices 1.1 sont les suivantes

(i) $T=\frac{1}{2}(m_1l_1^2+m_2l_2^2+m_3l_3^2+m_4l_4^2)\,\dot{\theta}^2$. $U=g[m_1l_1\sin\theta-m_2(l_2-l_2\cos\theta)-m_3l_3\sin\theta+m_4(l_4-l_4\cos\theta)]$.

(ii) $T=\frac{1}{18}(m_1+4m_2+M)l^2\,\dot{\theta}^2$. $U=\frac{1}{3}g[2m_2-m_1+\frac{1}{2}M](l-l\cos\theta)$.

(iii) $T=\frac{5}{4}[m+\frac{1}{6}M]l^2\,\dot{\theta}^2$. $U=-g[2m+\frac{1}{2}M](l-l\cos\theta)+\frac{3}{4}kl^2\sin^2\theta$.

(iv) $T=\frac{1}{2}(m_1+m_2+\frac{1}{2}M_1+\frac{1}{2}M_2)r^2\dot{\theta}_1^2$. $U=-g(m_1+m_2)r\theta_1+\frac{1}{2}kr^2\theta_1^2$.

(v) $T=\frac{1}{2}(6m+2M)\,r^2\,\dot{\theta}^2$. $U=-2mgr\theta+3kr^2\theta^2$.

Trouver dans chaque cas l'énergie mécanique pour $\theta\ll 1$ puis déduire l'équation du mouvement et la pulsation propre.

Solution : L'énergie mécanique d'un système est $E=T+U$. Pour trouver l'équation du mouvement, il suffit d'écrire l'équation de conservation de l'énergie totale: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=0$

(i) $$E=T+U=\frac{1}{2}(m_1l_1^2+m_2l_2^2+m_3l_3^2+m_4l_4^2)\,\dot{\theta}^2+g\,[m_1l_1\sin\theta-m_2(l_2-l_2\cos\theta)-m_3l_3\sin\theta+m_4(l_4-l_4\cos\theta)]$$
$$\approx\frac{1}{2}(m_1l_1^2+m_2l_2^2+m_3l_3^2+m_4l_4^2)\,\dot{\theta}^2+g(m_1l_1\theta-m_2l_2\frac{\theta^2}{2}-m_3l_3\theta+m_4l_4\frac{\theta^2}{2})$$
$$\approx\frac{1}{2}(m_1l_1^2+m_2l_2^2+m_3l_3^2+m_4l_4^2)\,\dot{\theta}^2+g(m_1l_1-m_3l_3)\theta+g(m_4l_4-m_2l_2)\frac{\theta^2}{2}.$$

L'équation du mouvement est: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=0\Longrightarrow\ddot{\theta}+\frac{g\,(m_4l_4-m_2l_2)}{m_1l_1^2+m_2l_2^2+m_3l_3^2+m_4l_4^2}\theta=\frac{g(m_3l_3-m_1l_1)}{m_1l_1^2+m_2l_2^2+m_3l_3^2+m_4l_4^2}$.

La pulsation propre du système est: $\omega_0=\sqrt{\frac{g\,(m_4l_4-m_2l_2)}{m_1l_1^2+m_2l_2^2+m_3l_3^2+m_4l_4^2}}$.

(ii) $$E=T+U=\frac{1}{18}(m_1+4m_2+M)l^2\,\dot{\theta}^2+\frac{1}{3}g[2m_2-m_1+\frac{1}{2}M](l-l\cos\theta)$$
$$\approx\frac{1}{18}(m_1+4m_2+M)l^2\,\dot{\theta}^2+\frac{1}{6}g[4m_2-2m_1+M]l\theta^2.$$

L'équation du mouvement est: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=0\Longrightarrow\ddot{\theta}+\frac{3g(4m_2-2m_1+M)}{(m_1+4m_2+M)l}\theta=0$. $\omega_0=\sqrt{\frac{3g(4m_2-2m_1+M)}{(m_1+4m_2+M)l}}$

.

(iii) $$E=T+U=\frac{5}{4}[m+\frac{1}{6}M]l^2\,\dot{\theta}^2-g[2m+\frac{1}{2}M](l-l\cos\theta)+\frac{3}{4}kl^2\sin^2\theta$$
$$\approx\frac{5}{4}[m+\frac{1}{6}M]l^2\,\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}g[2m+\frac{1}{2}M]l\theta^2+\frac{3}{4}kl^2\theta^2.$$

L'équation du mouvement est: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=0\Longrightarrow\ddot{\theta}+\frac{3kl-g(4m+M)}{5(m+\frac{1}{6}M)l}\theta=0$. $\omega_0=\sqrt{\frac{3kl-g(4m+M)}{5(m+\frac{1}{6}M)l}}$.

(iv) $E=T+U=\frac{1}{2}(m_1+m_2+\frac{1}{2}M_1+\frac{1}{2}M_2)r^2\dot{\theta}_1^2-g(m_1+m_2)r\theta_1+\frac{1}{2}kr^2\theta_1^2$.

L'équation du mouvement est: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=0\Longrightarrow\ddot{\theta}_1+\frac{k}{m_1+m_2+\frac{1}{2}M_1+\frac{1}{2}M_2}\theta_1=\frac{g(m_1+m_2)}{(m_1+m_2+\frac{1}{2}M_1+\frac{1}{2}M_2)r}$.

$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2+\frac{1}{2}M_1+\frac{1}{2}M_2}}$.

(v) $E=T+U=\frac{1}{2}(6m+2M)\,r^2\,\dot{\theta}^2-2mgr\theta+3kr^2\theta^2$.

L'équation du mouvement est: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=0\Longrightarrow\ddot{\theta}+\frac{3k}{3m+M}\theta=\frac{mg}{(3m+M)\,r}$. $\omega_0=\sqrt{\frac{3k}{3m+M}}$.

3.2 Les énergies cinétiques et potentielles obtenues pour la masse m de l'exercice 1.2 sur chacune des deux courbes sont les suivantes

(i) $T = \frac{1}{2}m\left(4x^2 - 16x + 17\right)\dot{x}^2$. $\quad U = mg(-x^2 + 4x - 1)$.

(ii) $T = \frac{1}{2}m\left[\left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)^2 + 1\right]\dot{x}^2$. $\quad U = mg(\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2)$.

Trouver l'énergie mécanique et déduire l'équation du mouvement pour chaque cas.

Solution : L'énergie mécanique d'un système est $E = T + U$. Pour trouver l'équation du mouvement, il suffit d'écrire l'équation de conservation de l'énergie totale: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$:

(i) $E = T + U = \frac{1}{2}m\left(4x^2 - 16x + 17\right)\dot{x}^2 + mg(-x^2 + 4x - 1)$.

L'équation du mouvement est: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \Longrightarrow \left(4x^2 - 16x + 17\right)\ddot{x} + (4x - 8)\,\dot{x}^2 + 2g(-x + 2) = 0$.

(ii) $E = T + U = \frac{1}{2}m\left[\left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)^2 + 1\right]\dot{x}^2 + mg(\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2)$.

L'équation du mouvement est: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$

$$\Longrightarrow \left[\left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)^2 + 1\right]\ddot{x} + \left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)\left(3x^2 - 10x + 6\right)\dot{x}^2 + g(x^3 - 5x^2 + 6x) = 0.$$

3.3 Les énergies cinétique et potentielle obtenues pour le liquide de l'exercice 1.3 sont:

$$T = \rho(SL + \tfrac{L_0S^2}{2S_0})\,\dot{y}^2. \qquad U = \rho S g y^2 + \mathrm{C}^{te}.$$

Trouver l'énergie totale puis déduire l'équation du mouvement et la pulsation propre

Solution : L'énergie totale d'un système est $E = T + U$. Pour trouver l'équation du mouvement, il suffit d'écrire l'équation de conservation de l'énergie totale: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$:

$E = T + U = \rho(SL + \frac{L_0S^2}{2S_0})\,\dot{y}^2 + \rho S g y^2 + \mathrm{C}^{te}$.

L'équation du mouvement est: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \Longrightarrow \ddot{y} + \frac{2Sg}{2SL + \frac{L_0S^2}{S_0}}\,y = 0.$ $\qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{2SS_0g}{2SS_0L + L_0S^2}}$.

4) Lagrangien et Équation du Mouvement

4.1 Les énergies cinétiques et potentielles obtenues pour chacun des systèmes de l'exercices 1.1 sont les suivantes

(i) $T = \frac{1}{2}(m_1l_1^2 + m_2l_2^2 + m_3l_3^2 + m_4l_4^2)\dot{\theta}^2$. $\quad U = g[m_1l_1\sin\theta - m_2(l_2 - l_2\cos\theta) - m_3l_3\sin\theta + m_4(l_4 - l_4\cos\theta)]$.

(ii) $T = \frac{1}{18}(m_1 + 4m_2 + M)l^2\dot{\theta}^2$. $\quad U = \frac{1}{3}g[-m_1 + 2m_2 + \frac{1}{2}M](l - l\cos\theta)$.

(iii) $T = \frac{5}{4}[m + \frac{1}{6}M]l^2\dot{\theta}^2$. $\quad U = -g[2m + \frac{1}{2}M](l - l\cos\theta) + \frac{3}{4}kl^2\sin^2\theta$.

(iv) $T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2)r^2\dot{\theta}_1^2$. $\quad U = -g(m_1 + m_2)r\theta_1 + \frac{1}{2}kr^2\theta_1^2$.

(v) $T = \frac{1}{2}(6m + 2M)\,r^2\dot{\theta}^2$. $\quad U = -2mgr\theta + 3kr^2\theta^2$.

Trouver dans chaque cas le Lagrangien pour $\theta \ll 1$ puis déduire l'équation du mouvement.

Solution : Le Lagrangien d'un système est $\mathcal{L} = T - U$. Pour trouver l'équation du mouvement, il suffit d'écrire l'équation de Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$.

(i) $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}(m_1l_1^2 + m_2l_2^2 + m_3l_3^2 + m_4l_4^2)\,\dot{\theta}^2 - g\left[m_1l_1\sin\theta - m_2(l_2 - l_2\cos\theta) - m_3l_3\sin\theta + m_4(l_4 - l_4\cos\theta)\right]$

$$\approx \frac{1}{2}(m_1l_1^2 + m_2l_2^2 + m_3l_3^2 + m_4l_4^2)\,\dot{\theta}^2 - g(m_1l_1 - m_3l_3)\theta - g(m_4l_4 - m_2l_2)\frac{\theta^2}{2}.$$

L'équation du mouvement est: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g(m_4l_4 - m_2l_2)}{m_1l_1^2 + m_2l_2^2 + m_3l_3^2 + m_4l_4^2}\theta = \frac{g(m_3l_3 - m_1l_1)}{m_1l_1^2 + m_2l_2^2 + m_3l_3^2 + m_4l_4^2}$.

(ii) $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{18}(m_1 + 4m_2 + M)l^2 \dot{\theta}^2 - g\frac{1}{3}[2m_2 - m_1 + \frac{1}{2}M](l - l\cos\theta)$

$\approx \frac{1}{18}(m_1 + 4m_2 + M)l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{6}g[4m_2 - 2m_1 + M]l\theta^2.$

L'équation du mouvement est: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow \ddot{\theta} + \dfrac{3g(4m_2 - 2m_1 + M)}{(4m_2 + m_1 + M)l}\theta = 0.$

(iii) $\mathcal{L} = T - U = \frac{5}{4}[m + \frac{1}{6}M]l^2 \dot{\theta}^2 + g[2m + \frac{1}{2}M](l - l\cos\theta) - \frac{3}{4}kl^2 \sin^2\theta$

$\approx \frac{5}{4}[m + \frac{1}{6}M]l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}g[2m + \frac{1}{2}M]l\theta^2 - \frac{3}{4}kl^2\theta^2.$

L'équation du mouvement est: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow \ddot{\theta} + \dfrac{3kl - g(4m + M)}{5(m + \frac{1}{6}M)l}\theta = 0.$

(iv) $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2)r^2\dot{\theta}_1^2 + g(m_1 + m_2)r\theta_1 - \frac{1}{2}kr^2\theta_1^2$

L'équation du mouvement est: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = 0 \Longrightarrow \ddot{\theta}_1 + \dfrac{k}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2}\theta_1 = \dfrac{g(m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2)r}.$

(v) $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}(6m + 2M)r^2 \dot{\theta}^2 + 2mgr\theta - 3kr^2\theta^2.$

L'équation du mouvement est: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Longrightarrow \ddot{\theta} + \dfrac{3k}{3m + M}\theta = \dfrac{mg}{(3m + M)\,r}.$

4.2 Les énergies cinétiques et potentielles obtenues pour la masse m de l'exercice 1.2 sur chacune des deux courbes sont les suivantes

(i) $T = \frac{1}{2}m\left(4x^2 - 16x + 17\right)\dot{x}^2.$ $\quad U = mg(-x^2 + 4x - 1).$

(ii) $T = \frac{1}{2}m\left[\left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)^2 + 1\right]\dot{x}^2.$ $\quad U = mg(\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2).$

Trouver le Lagrangien puis déduire l'équation du mouvement pour chaque cas.

Solution : Le Lagrangien d'un système est $\mathcal{L} = T - U$. Pour trouver l'équation du mouvement, il suffit d'écrire l'équation de Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0.$

(i) $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\left(4x^2 - 16x + 17\right)\dot{x}^2 - mg(-x^2 + 4x - 1).$

L'équation du mouvement est: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \left(4x^2 - 16x + 17\right)\ddot{x} + (4x - 8)\dot{x}^2 + 2g(-x + 2) = 0.$

(ii) $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\left[\left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)^2 + 1\right]\dot{x}^2 - mg(\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2).$

L'équation du mouvement est: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$

$\Longrightarrow \left[\left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)^2 + 1\right]\ddot{x} + \left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)\left(3x^2 - 10x + 6\right)\dot{x}^2 + g(x^3 - 5x^2 + 6x) = 0.$

4.3 Les énergies cinétique et potentielle obtenues pour le liquide de l'exercice 1.3 sont:

$$T = \rho(SL + \tfrac{L_0 S^2}{2S_0})\,\dot{y}^2. \qquad U = \rho Sgy^2 + C^{te}.$$

Trouver le Lagrangien puis déduire l'équation du mouvement.

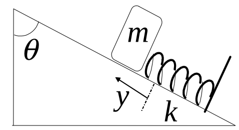
Solution : Le Lagrangien d'un système est $\mathcal{L} = T - U$. Pour trouver l'équation du mouvement, il suffit d'écrire l'équation de Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0.$

$\mathcal{L} = T - U = \rho(SL + \frac{L_0 S^2}{2S_0})\,\dot{y}^2 - \rho Sgy^2.$ (La constante C^{te} n'a pas d'importance pour le Lagrangien)

L'équation du mouvement est: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \ddot{y} + \dfrac{2Sg}{2SL + \frac{L_0 S^2}{S_0}}y = 0.$

4.4 Soit le système mécanique ci-contre. La variable est y.
A l'équilibre le ressort était déjà comprimé de y_0.

1. **Trouver l'énergie cinétique T du système.**
2. **Trouver l'énergie potentielle U du système en fonction de y.**
3. **Trouver la compression y_0 du ressort à l'équilibre.**
4. **Trouver le Lagrangien et déduire l'équation du mouvement.**



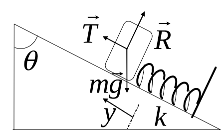
Solution :
1. L'énergie cinétique du système est $T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$.
2. Lorsque le ressort se dilate d'une distance y, la masse est soulevée d'une hauteur $h = y\cos\theta$.
L'énergie potentielle du système est donc $U = U_{masse} + U_{ressort} = mgh + \frac{1}{2}k(y-y_0)^2 = mgy\cos\theta + \frac{1}{2}k(y-y_0)^2$.
3. La condition d'équilibre est $\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \Longrightarrow mg\cos\theta + k(y-y_0)|_{y=0} = 0 \Longrightarrow y_0 = \dfrac{mg\cos\theta}{k}$.
4. Le Lagrangien est $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy\cos\theta - \frac{1}{2}k(y-y_0)^2 = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy\cos\theta - \frac{1}{2}ky^2 + kyy_0 - \frac{1}{2}ky_0^2$.

La condition d'équilibre simplifie le Lagrangien en $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \frac{1}{2}ky^2 - \frac{1}{2}ky_0^2$.
L'équation du mouvement est $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \ddot{y} + \dfrac{k}{m} y = 0$.

5) PFD, TMC, LOI DES MAILLES, ET ÉQUATION DU MOUVEMENT

5.1 Soit le système mécanique de l'exercice 4.3 ci-contre.
A l'équilibre le ressort était déjà comprimé de y_0.

1. **En appliquant le PFD à l'équilibre trouver la compression y_0 .**
2. **En appliquant le PFD au mouvement trouver l'équation du mouvement.**



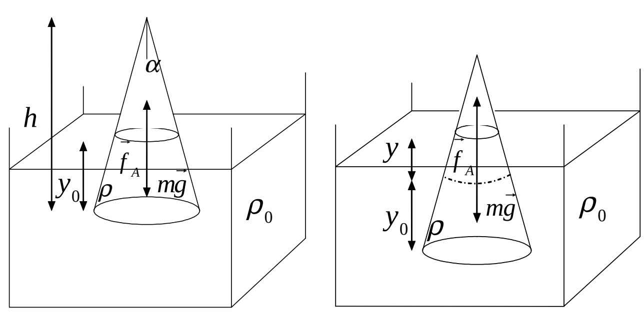
Solution :
1. A l'équilibre on a $\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{T} + \overrightarrow{R} + m\overrightarrow{g} = \overrightarrow{0}$ → Par projection → $ky_0 - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow y_0 = \dfrac{mg\cos\theta}{k}$.
2. Lors du mouvement on a $\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a} \Longrightarrow \overrightarrow{T} + \overrightarrow{R} + m\overrightarrow{g} = m\overrightarrow{a}$ → Par projection →

$$k(y_0 - y) - mg\cos\theta = m\ddot{y} \Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m} y = 0.$$

5.2 Un cône plein et homogène de demi angle au sommet α, de hauteur h, et de densité volumique ρ posé verticalement à la surface d'un liquide de densité ρ_0.

1. **Trouver à l'aide du PFD la profondeur d'immersion y_0 du cône à l'équilibre.**
2. **En poussant légèrement le cône vers le bas puis en le relâchant, il se met à osciller. En négligeant le frottement visqueux, trouver l'équation du mouvement en fonction de la profondeur additionnelle d'immersion $y \ll h - y_0$, puis déduire la pulsation propre d'oscillation.**

Rappels
- *Le volume d'un cône de demi angle au sommet α et de hauteur h est :* $V = \frac{\pi h^3}{3} tan^2\alpha$.
- *La poussée d'Archimède sur un corps plongé dans un liquide est égale au poids du liquide déplacé par le volume immergé du corps.*



Au repos En mouvement

Solution :

1. Pour trouver y_0 à léquilibre, appliquons le PFD au repos: $\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$

$\Longrightarrow m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{f}_A = \overrightarrow{0} \Longrightarrow mg - f_A = 0 \Longrightarrow \rho V_{cône}.g - \rho_0 V_{immergé}.g = 0$

$\Longrightarrow \rho V_{cône} - \rho_0(V_{cône} - V_{non\ immergé}) = 0$

$\Longrightarrow \rho\frac{\pi h^3}{3}\tan^2\alpha - \rho_0[\frac{\pi h^3}{3}\tan^2\alpha - \frac{\pi\left(h-y_0\right)^3}{3}\tan^2\alpha] = 0 \Longrightarrow y_0 = h[1 - \left(\frac{\rho_0-\rho}{\rho_0}\right)^{1/3}].$

2. Pour trouver l'équation du mouvement, appliquons le PFD au mouvement :

$\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a} \Longrightarrow m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{f}_A = m\overrightarrow{a} \Longrightarrow mg - f_A = m\ddot{y} \Longrightarrow \rho V_{cône}.g - \rho_0 V_{immergé}.g = \rho V_{cône}\ddot{y}$

$\Longrightarrow \rho V_{cône} g - \rho_0(V_{cône} - V_{non\ immergé})g = \rho V_{cône}\ddot{y}$

$\Longrightarrow \{\rho\frac{\pi h^3}{3}\tan^2\alpha - \rho_0[\frac{\pi h^3}{3}\tan^2\alpha - \frac{\pi\left(h-y_0-y\right)^3}{3}\tan^2\alpha]\}g = \ddot{y}\rho\frac{\pi h^3}{3}\tan^2\alpha.$

Puisque $y \ll h - y_0$, nous avons $\left(h-y_0-y\right)^3 = \left(h-y_0\right)^3\left(1-\frac{y}{h-y_0}\right)^3 \approx \left(h-y_0\right)^3\left(1-3\frac{y}{h-y_0}\right)$

$\approx \left(h-y_0\right)^3 - 3y\left(h-y_0\right)^2.$

Avec cette approximation l'équation précédente devient:

$$\rho\frac{\pi h^3}{3}\tan^2\alpha - \rho_0\left(\frac{\pi h^3}{3}\tan^2\alpha - \frac{\pi\left(h-y_0\right)^3}{3}\tan^2\alpha + \pi y\left(h-y_0\right)^2\tan^2\alpha\right) = \ddot{y}\rho\frac{\pi h^3}{3g}\tan^2\alpha.$$

En utilisant la condition d'équilibre, l'équation se simplifie encore:

$$-\rho_0\pi y\left(h-y_0\right)^2\tan^2\alpha = \ddot{y}\rho\frac{\pi h^3}{3g}\tan^2\alpha \Longrightarrow \ddot{y} + \frac{3g\rho_0\left(h-y_0\right)^2}{\rho h^3}y = 0. \qquad \omega_0 = \left(h-y_0\right)\sqrt{\frac{3g\rho_0}{\rho h^3}}.$$

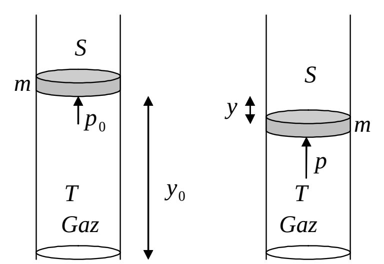
5.3 Un tube de section S est rempli d'un gaz parfait à la température supposée constante T. Le couvercle du tube est un disque de masse m suspendu horizontalement par la pression du gaz à l'intérieur du tube.

1. Trouver à l'aide du PFD la hauteur y_0 de la colonne du gaz à l'équilibre.

2. En poussant légèrement le disque vers le bas puis en le relâchant, il se met à osciller. Trouver l'équation du mouvement en fonction de l'abaissement $y \ll y_0$ puis déduire la pulsation propre d'oscillation.

Rappels

- *La force crée par une pression p sur une surface S est $f = pS$*
- *La pression crée par un gaz parfait à la température T est, d'après la loi de Boyle-Mariotte: $p = \frac{nRT}{V}$.*



Solution :

1. Pour trouver y_0 à l'équilibre, appliquons le PFD au repos :

$\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{f}_{gaz} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow mg - f_{gaz} = 0 \Longrightarrow mg - p_0 S = 0 \Longrightarrow mg - \frac{nRT}{V_0}S = 0.$

Puisque $V_0 = Sy_0$, on obtient: $mg - \frac{nRT}{y_0} = 0 \Longrightarrow y_0 = \frac{nRT}{mg}.$

2. Pour trouver l'équation du mouvement, appliquons le PFD au mouvement :

$\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a} \Longrightarrow m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{f}_{gaz} = m\overrightarrow{a} \Longrightarrow mg - f_{gaz} = m\ddot{y}$

$\Longrightarrow mg - pS = m\ddot{y} \Longrightarrow mg - \frac{nRT}{V}S = m\ddot{y}.$

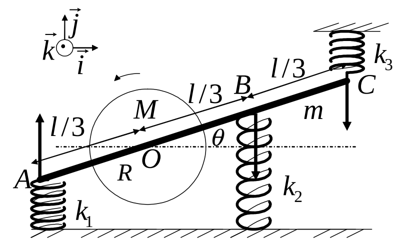
Puisque $V = S\,(y_0 - y)$, on obtient: $mg - \frac{nRT}{y_0 - y} = m\ddot{y}$.

Puisque $y \ll y_0$ on a: $\frac{nRT}{y_0 - y} = \frac{nRT}{y_0\left(1 - \frac{y}{y_0}\right)} \approx \frac{nRT}{y_0}\left(1 + \frac{y}{y_0}\right) = \frac{nRT}{y_0} + \frac{nRT}{y_0^2}y$. L'équation précédente devient,

$mg - \frac{nRT}{y_0} - \frac{nRT}{y_0^2}y = m\ddot{y}$. A l'aide de la condition d'équilibre cette équation se simplifie en, $-\frac{nRT}{y_0^2}y = m\ddot{y}$

$\Longrightarrow \ddot{y} + \frac{nRT}{my_0^2}y = 0$. La pulsation propre est donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{nRT}{my_0^2}}$.

5.4 Soit le système ci-contre. A l'équilibre la tige (collée au disque) était horizontale et les ressorts non déformés. En négligeant les frottements lors de la rotation, trouver en appliquant le TMC l'équation du mouvement du système autour du point O en fonction de θ, pour $\theta \ll 1$.



Solution :

$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}} = \frac{d\overrightarrow{L}}{dt} \Longrightarrow \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F}_{k_1} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F}_{k_2} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{F}_{k_3} + \overrightarrow{OG} \wedge m\overrightarrow{g} = \frac{d(I\overrightarrow{\omega})}{dt}$. $(*)$

Calculons séparément chacun des quatre moments de force ainsi que le moment d'inertie

$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F}_{k_1} = \frac{l}{3}(-\cos\theta\,\overrightarrow{i} - \sin\theta\,\overrightarrow{j}) \wedge k_1\frac{l}{3}\sin\theta\,\overrightarrow{j} = -\frac{l^2}{9}k_1\cos\theta\sin\theta\,\overrightarrow{k} \approx -\frac{l^2}{9}k_1\theta\,\overrightarrow{k}$.

$\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F}_{k_2} = \frac{l}{3}(\cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}) \wedge k_2\frac{l}{3}\sin\theta\left(-\overrightarrow{j}\right) = -\frac{l^2}{9}k_2\cos\theta\sin\theta\,\overrightarrow{k} \approx -\frac{l^2}{9}k_2\theta\,\overrightarrow{k}$.

$\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{F}_{k_3} = \frac{2l}{3}(\cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}) \wedge k_3\frac{2l}{3}\sin\theta\left(-\overrightarrow{j}\right) = -\frac{4l^2}{9}k_3\cos\theta\sin\theta\,\overrightarrow{k} \approx -\frac{4l^2}{9}k_3\theta\,\overrightarrow{k}$.

$\overrightarrow{OG} \wedge m\overrightarrow{g} = (\frac{l}{2} - \frac{l}{3})(\cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}) \wedge mg(-\overrightarrow{j}) = -\frac{l}{6}mg\cos\theta\,\overrightarrow{k} \approx -\frac{l}{6}mg\,\overrightarrow{k}$.

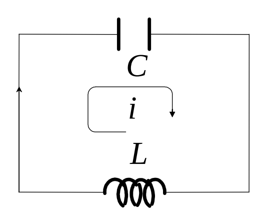
$$I\overrightarrow{\omega} = (I_M + I_m)\,\overrightarrow{\omega} = [\tfrac{1}{2}MR^2 + \tfrac{1}{12}ml^2 + m(\tfrac{l}{2} - \tfrac{l}{3})^2]\dot{\theta}\,\overrightarrow{k} = [\tfrac{1}{2}MR^2 + \tfrac{1}{9}ml^2]\dot{\theta}\,\overrightarrow{k}.$$

En remplaçant ces résultats dans l'équation $(*)$, on trouve après simplification par $\overrightarrow{k}$:

$-\frac{1}{9}(k_1 + k_2 + 4k_3)l^2\theta - \frac{1}{6}mgl = [\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{9}ml^2]\ddot{\theta} \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{2(k_1 + k_2 + 4k_3)l^2}{9MR^2 + 2ml^2}\theta = -3mgl.$

5.5 Soit le circuit électrique ci-contre.

1. **Trouver à l'aide de la loi des mailles l'équation différentielle que satisfait la charge q qui circule dans le circuit.**
2. **Trouver l'équation différentielle de la tension u_C du condensateur.**
3. **Trouver l'équation différentielle de la tension u_L de la bobine.**
4. **Trouver l'équation différentielle du courant i.**
5. **Déduire la pulsation propre de cet oscillateur harmonique.**



Solution : Appliquons la loi des mailles à l'unique maille du circuit: $u_L + u_C = 0.(*)$

1. Puisque $u_C = \frac{q}{C}$ et $u_L = L\frac{di}{dt} = L\ddot{q}$: l'équation $(*)$ nous donne $\boxed{\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0.}$

2. Puisque $u_C = \frac{q}{C} \Rightarrow u_L = L\ddot{q} = LC\ddot{u}_C$: l'équation $(*)$ nous donne $LC\ddot{u}_C + u_C = 0 \Longrightarrow \boxed{\ddot{u}_C + \frac{1}{LC}u_C = 0.}$

3. Puisque $u_L = L\ddot{q}$ et $u_C = \frac{q}{C} \Rightarrow \ddot{u}_C = \frac{\ddot{q}}{C} = \frac{u_L}{LC}$: l'équation $(*)$ nous donne $\ddot{u}_L + \ddot{u}_C = 0 \Longrightarrow \boxed{\ddot{u}_L + \frac{1}{LC}u_L = 0.}$

4. Puisque $i = \dot{q} = C\dot{u}_C$ et $\dot{u}_L = L\frac{d^2}{dt^2}i$: l'équation $(*)$ nous donne $\dot{u}_L + \dot{u}_C = 0 \Longrightarrow \boxed{\frac{d^2}{dt^2}i + \frac{1}{LC}i = 0.}$

5. La pulsation propre du système est $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. (Remarquer la même forme des quatre équations.)