04 /06/2016

Université Akli Mohand Oulhadj – Bouira **Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées**
Département de Génie Electrique **Année universitaire : 2015/2016**
2^eme^ Année Génie Electrique : Génie Biomédical, Télécommunication, Electronique et Electrotechnique
Semestre 4 **Durée : 1H30min**

Examen de Théorie du Signal

N.B : La clarté des réponses sera prise en considération.

Questions de cours :(06 pts)

1. Un signal périodique ne possède pas de transformée de Fourier, vrai ou faux ?
2. Qu'est ce qu'un signal à puissance moyenne finie ?
3. Quel est le principe du théorème de Parseval pour les séries de Fourier ?
4. La transformée de Laplace unilatérale est applicable sur les signaux causaux, vrai ou faux ?

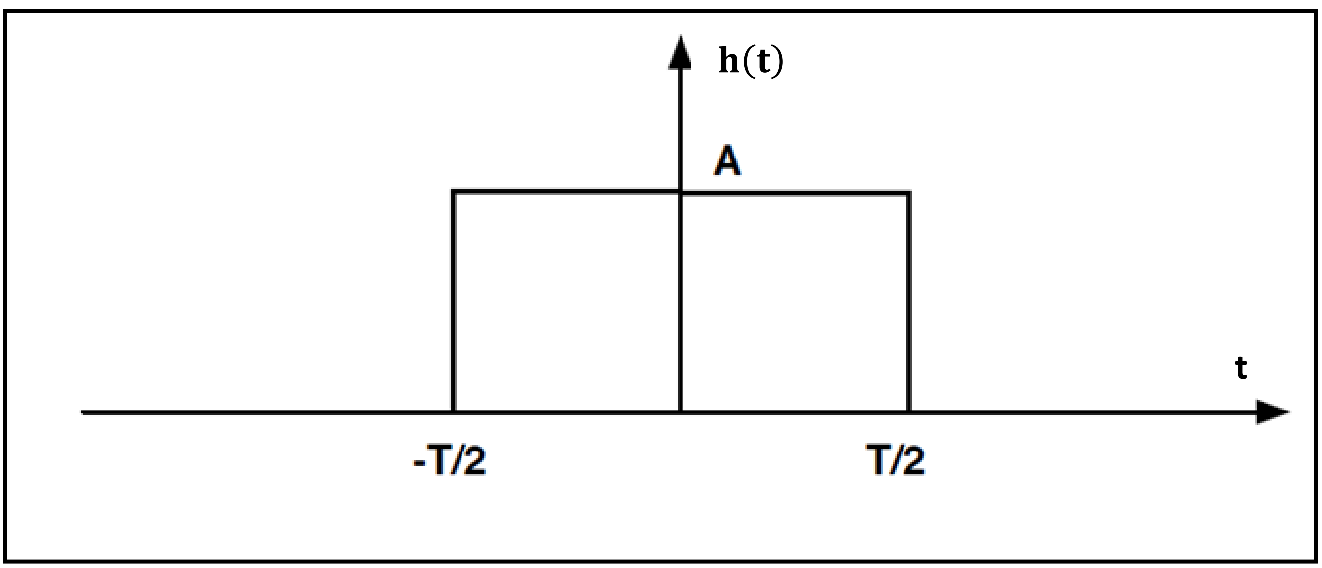
Exercice 01 :(08 pts)

Soit le signal $x(t)$, défini par : $\boldsymbol{x(t)} = \begin{cases} 1 - |\boldsymbol{t}| & \boldsymbol{si} \ \ |\boldsymbol{t}| \leq \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{si\,non} \end{cases}$

1. Représenter le signal $x(t)$,
2. Déterminer le nom et les caractéristiques du signal $x(t)$,
3. Représenter les signaux suivant : $x(t+1)$, $x(t-1)$ et $x(t) \times \varepsilon(t)$,
4. Déterminer la transformée de Fourier des signaux : $x\left(t - \frac{1}{2}\right)$, $x(2t)$ et $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$.

Exercice 02 :(06 pts)

Soit le signal $\mathrm{h(t)}$ représenté sur la figure ci-dessous :



1. Déterminer les coefficients complexes C_n de la série de Fourier associée à $\mathrm{h(t)}$,
2. Déduire les coefficients de Fourier : a_0, a_n et b_n ,
3. Calculer la puissance du signal $\mathrm{h(t)}$ à l'aide des coefficients de Fourier,
4. Représenter le spectre d'amplitude de h(t) pour : $-1 \leq \mathrm{n} \leq 1$.

Bon courage

Module : "Théorie du Signal"

2ème Année GE

Année universitaire : 2015/2016

Corrigé d'Examen

Questions de cours :

① → Un signal périodique ne possède pas de transformée de Fourier, $\boxed{\text{faux}}$ (01,5 pts)

② → Un signal est à puissance moyenne finie si sa puissance totale converge, càd :

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \infty$$

(01,5 pts)

③ → Le principe du théorème de parseval est :

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

$$= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$

(01,5 pts)

④ → La transformée de Laplace unilatérale est applicable sur les signaux causaux, $\boxed{\text{Vrai}}$

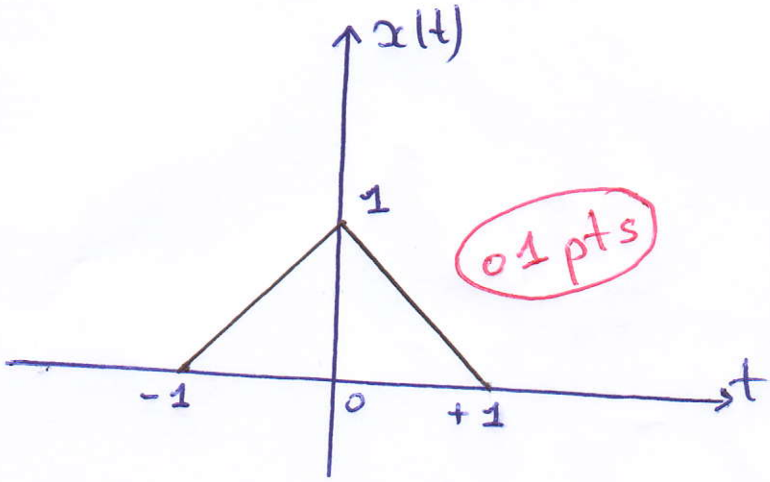
(01,5 pts)

Exercice « 01 » :

$$x(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

① → Représentation de $x(t)$:

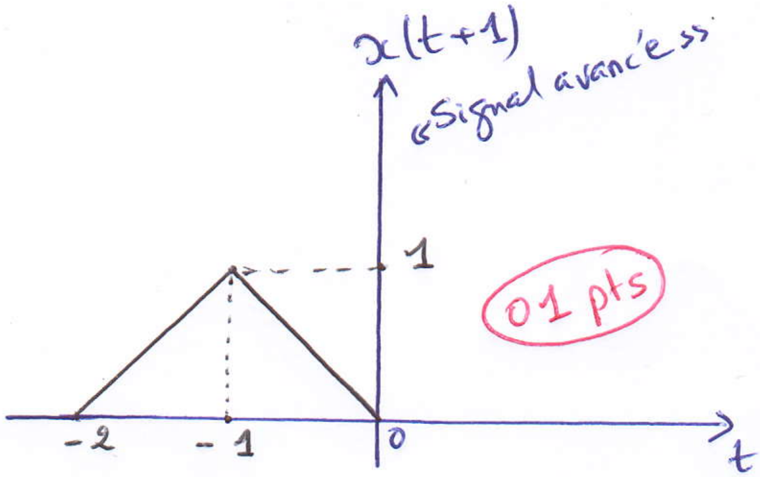
On a : $$x(t) = \begin{cases} 1 + t & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ 1 - t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

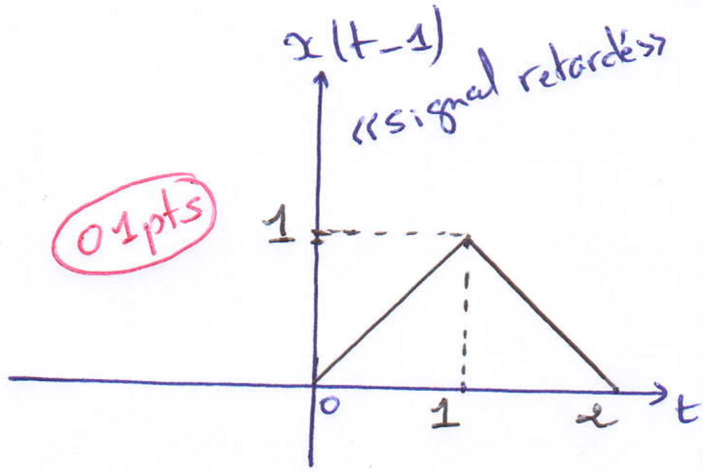


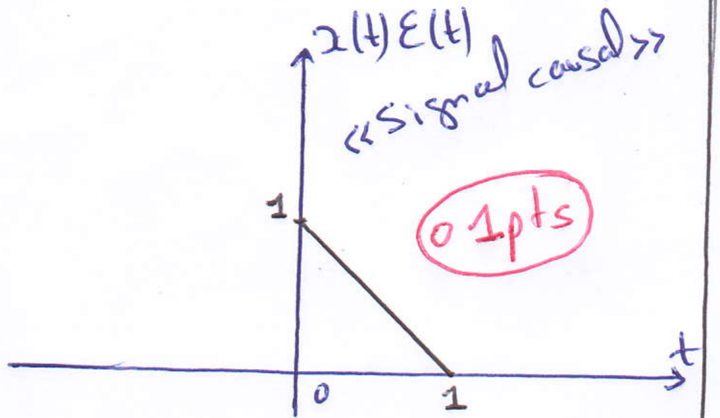
(01 pts)

② → $x(t)$ est un signal triangulaire (0,5), c'est un signal déterministe et périodique de période $T = 2$. (0,5)

③ → Représentation des signaux suivant : $x(t+1)$, $x(t-1)$ et $x(t)\,\varepsilon(t)$:







④ → La transformée de Fourier des signaux suivants:

⊛ $TF\left\{x\left(t-\frac{1}{2}\right)\right\} = ?$

Dans ce cas, on applique la propriété de translation;

$$TF\{x(t-a)\} = X(f)\,e^{-j2\pi a f}$$

alors: $a = \frac{1}{2}$

On sait que: $x(t) = tri(t)$

alors: $X(f) = sinc^2(f)$
(voir la table de la TF)

donc:

$$TF\left\{x\left(t-\frac{1}{2}\right)\right\} = sinc^2(f)\,e^{-j2\pi\left(\frac{1}{2}\right)f}$$

$$\boxed{TF\left\{x\left(t-\frac{1}{2}\right)\right\} = sinc^2(f)\,e^{-j\pi f}}$$ 01pts

⊛⊛ $TF\{x(2t)\} = ?$

Dans ce cas, on applique la propriété de similitude;

$$TF\{x(at)\} = \frac{1}{|a|}\,X\left(\frac{f}{a}\right)$$

alors: $a = 2$

donc:

$$TF\{x(2t)\} = \frac{1}{2}\,X\left(\frac{f}{2}\right)$$

$$\boxed{TF\{x(2t)\} = \frac{1}{2}\,sinc^2\left(\frac{f}{2}\right)}$$ 01pts

⊛⊛⊛ $TF\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} = ?$

Dans ce cas, on applique la propriété de la Dérivation/t.

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{TF} (j2\pi f)^n\,X(f)$$

alors: $n = 2$ (La deuxième dérivée)

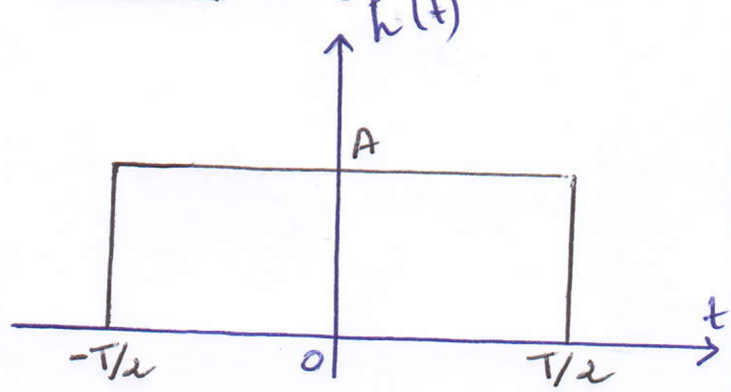
$$TF\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} = (j2\pi f)^2\,sinc^2(f)$$

donc:

$$\boxed{TF\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} = (-4\pi^2 f^2)\,\text{sinc}^2(f)}$$

01pts

Exercice ((02)) : $h(t)$



① → Les coéfficients complexes C_n:

On sait que, la forme complexe du developpement en série de Fourier du signal $h(t)$ est:

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t}$$

avec:

$$C_n = \frac{1}{T}\int_T h(t)\, e^{-jn\omega t}\, dt$$ 0,5

pour notre cas, $h(t)$ est un rectangle d'amplitude "A" et de période "T".

alors:

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\, e^{-jn\omega t}\, dt$$ 0,5

avec: $\omega = 2\pi/T$

donc:

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\, e^{-jn\frac{2\pi}{T}t}\, dt$$

$$= \frac{A}{\cancel{T}}\left(\frac{-1}{j\frac{2\pi}{\cancel{T}}n}\right)\left[e^{-jn\frac{2\pi}{T}t}\right]_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \frac{-A}{2jn\pi}\left[e^{-jn\pi} - e^{+jn\pi}\right]$$

$$= \frac{+A}{n\pi}\left[\frac{e^{jn\pi} - e^{-jn\pi}}{2j}\right]$$

$$= A.\frac{\sin(n\pi)}{n\pi}$$

$$= A\,\text{sinc}(n)$$

alors:

$$\boxed{C_n = A\,\text{sinc}(n)}$$ 01 pts

② → Les coefficients de Fourier: a_0, a_n et b_n

on a: $h(t)$ est pair

d'où: $\boxed{b_n = 0}$ 0,5

d'autre part: $a_n = C_n + C_{-n}$

donc: $a_0 = C_0 = A\,\text{sinc}(0)$

$\Rightarrow \boxed{a_0 = A}$ $(\text{sinc}(0) = 1)$ 0,5

et:

$$a_n = C_n + C_{-n}$$

$$\Rightarrow a_n = A\,\text{sinc}(n) + A\,\text{sinc}(-n)$$

on a:

$$\text{sinc}(-n) = \frac{\sin(-n\pi)}{-n\pi} = \frac{-\sin(n\pi)}{-n\pi} = \text{sinc}(n)$$

alors: $\boxed{a_n = 2A\,\mathrm{sinc}(n)}$ 0,5

③ → La puissance du signal $R(t)$ à l'aide des coefficients de Fourier:

on sait que:

$$P = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$

donc:

$$P_R = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$ 0,5

Sachant que $C_n = A\,\mathrm{sinc}(n)$

alors:

$$P_R = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(A\,\mathrm{sinc}(n)\right)^2$$

$$= A^2 \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(n)}_{=1}$$

$\boxed{P_R = A^2}$ 0,5

④ → Représentation du spectre d'amplitude de $R(t)$ pour: $-1 \leq n \leq 1$

→ le spectre d'amplitude est le module de C_n:

$$|C_n| = |A\,\mathrm{sinc}(n)| = A_n$$ 0,5

• $n = -1 \Rightarrow A_{-1} = A\,\mathrm{sinc}(-1)$

$\mathrm{sinc}(-1) = \frac{\sin(-\pi)}{-\pi} = 0$

$\Rightarrow \boxed{A_{-1} = 0}$

• $n = 0 \Rightarrow A_0 = A\,\mathrm{sinc}(0)$

$\mathrm{sinc}(0) = 1 \Rightarrow \boxed{A_0 = A}$

• $n = 1 \Rightarrow A_1 = A\,\mathrm{sinc}(1)$

$\mathrm{sinc}(1) = \frac{\sin(\pi)}{\pi} = 0$

$\Rightarrow \boxed{A_1 = 0}$