Partie 2 :

Segmentation par la méthode des ensembles de niveaux (Level Set)

La théorie des **Level Set**, est une formulation pour implémenter les contours actifs a été proposée par Osher et Sethian. Ils représentent implicitement un contour via une fonction bidimensionnelle continue $\Phi(x, y)$: définie sur le plan de l'image. La fonction $\Phi(x, y)$ est nommée *fonction Level set (ensemble de niveau),* et un niveau particulier ; généralement le niveau zéro, de $\Phi(x, y)$ est défini comme un contour tel que

$$C \equiv \{(x, y) : \Phi(x, y) = 0\}, \forall (x, y) \in \Omega$$

Où Ω désigne le plan entier de l'image.

La figure 1 (a) montre l'évolution de la fonction Level Set, et la figure 1(b) montre la propagation des contours correspondant à C.

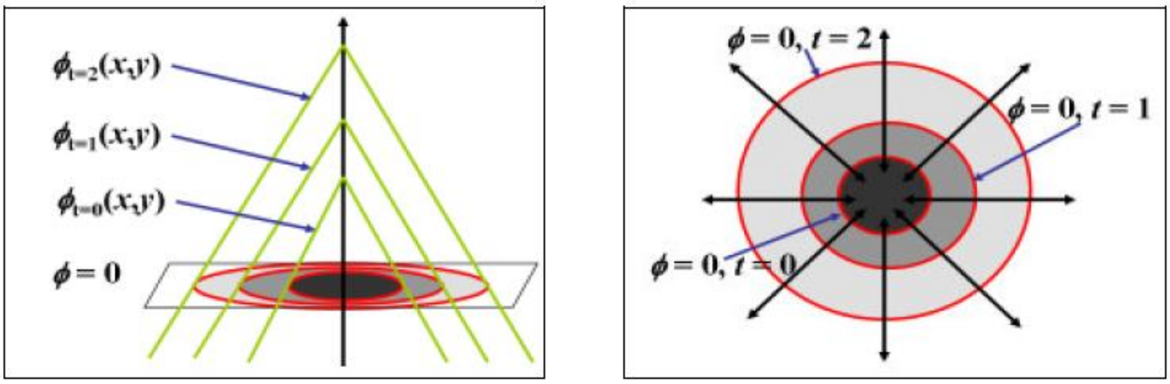

Figure 1. L'évolution de la fonction level set et la propagation des contours correspondant: (a) la vue topologique de l'évolution de $\Phi(x, y)$, (b) les changements du level set initiale C: $\Phi(x, y) = 0$.

Comme la fonction Level Set $\Phi(x, y)$ passe de sa phase initiale, vers l'ensemble de contours *C* correspondant c'est-à-dire le contour rouge se propage vers l'extérieur. Avec cette définition, l'évolution du contour est équivalente à l'évolution de la fonction Level set, c'est à-dire :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial t}$$

L'avantage de l'utilisation du niveau zéro est qu'un contour peut être défini comme la frontière identifier par la vérification du signe de $\Phi(x, y)$. La fonction du Level set initiale $\Phi(x, y)$ peut être donnée par la distance signée du contour initiale comme suit :

$$\Phi_0(x, y) \equiv \{\Phi(x, y) : t = 0\} \quad = \pm D((x, y), N_{xy}(C_0)) \quad , \forall (x, y) \in \Omega$$

Où

$\pm D(a,b)$ indique une distance signée entre a et b.

$N_{xy}(C)$ désigne le plus proche pixel voisin sur le contour initial $C_0 = C(t = 0)$ à partir de (x, y).

La figure 2(a) montre un exemple des contours initiaux C_0, la figure 2(b) montre la fonction Level set initiale $\Phi_0(x, y)$ qui représente la distance signée calculé du contour initiale C_0.

$\Phi_0(x, y)$ augmente, c'est-à-dire, devient plus lumineuse, à mesure qu'un pixel (x, y) est situé plus loin à l'intérieur du contour initiale C_0. Tandis que quand $\Phi_0(x, y)$ diminue, c'est-à-dire, devient plus foncée, à mesure que le pixel est situé plus loin à l'extérieur du contour initiale. La fonction initiale des level set est à zéro aux points du contour initiale donnée par, $\Phi_0(x, y) = 0, \forall (x, y) \in C_0$.

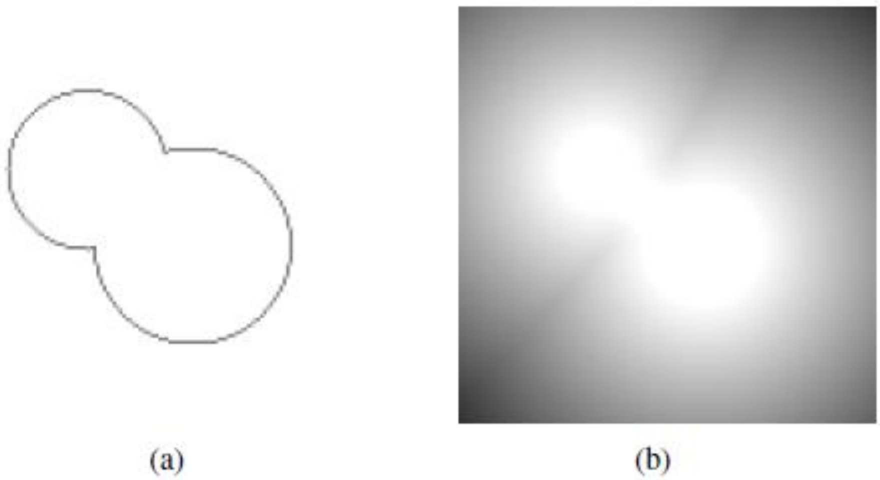

Figure 2. Contour initiale et la distance signée correspondante: (a) le contour initiale C_0, (b) la fonction level set initiale $\Phi(x, y)$ déterminé par la distance signée.

La déformation du contour est généralement représentée sous la forme numérique d'une EDP (équation aux différences partielles). Une formulation de l'évolution du contour en utilisant la valeur absolue du gradient de $\Phi(x, y)$ a été initialement proposée par Osher et Sethian :

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial t} = |\nabla \Phi(x,y)|(\upsilon + \varepsilon \kappa(\Phi(x,y)))$$

Où ν désigne une constante de vitesse pour pousser ou tirer le contour, $\kappa(.)$ désigne la courbure moyenne de la fonction du Level set $\Phi(x, y)$ donnée par :

$$\kappa(\Phi(x,y)) = \frac{\Phi_{xx}\Phi_y^2 - 2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} + \Phi_{yy}\Phi_x^2}{\left(\Phi_x^2 + \Phi_y^2\right)^{3/2}}$$

Où Φ_x et Φ_{xx} désignent la première et la seconde dérivée partielle de $\Phi(x, y)$ par rapport à x, Φ_y et Φ_{yy} désignent la première et la seconde dérivée partielle de $\Phi(x, y)$ par rapport à y.

Le rôle du terme de la courbure est de contrôler la régularité des contours comme pour l'énergie interne E_{int} dans le modèle des *snakes* classiques. ε contrôle l'équilibre entre la régularité et la robustesse de l'évolution du contour.

Une caractéristique exceptionnelle des méthodes des level set est que les contours peuvent se diviser ou fusionner comme la topologie de la fonction level set change. Donc, les méthodes des level set peuvent détecter plus d'une frontière simultanément et une multitude de contours initiaux peuvent être placés. La figure 3(a) montre un exemple des changements topologiques d'une fonction level set, tandis que la figure 3(b) montre comment la fusion des contours initialement séparés varie avec la topologie de la fonction level set.

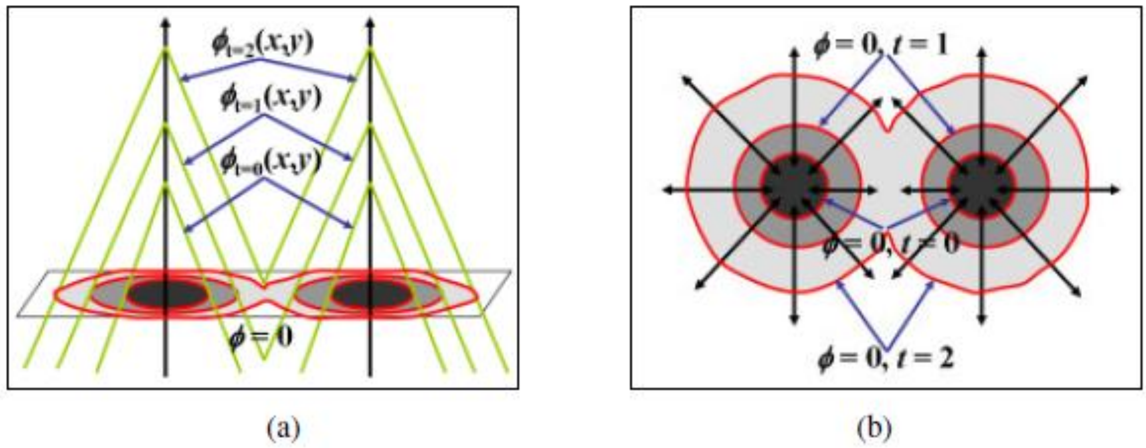

Figure 3. Changement de la topologie observée dans l'évolution de la fonction level set et la propagation des contours correspondant: (a) la vue topologique de l'évolution de $\Phi(x, y)$, (b) les changements du level set initiale C: $\Phi(x, y) = 0$.

Cette flexibilité et convenance fournissent des moyens pour une segmentation autonome par l'utilisation d'un ou de plusieurs contours initiaux. Le coût de calcul des méthodes des ensembles de niveaux est élevé parce que le calcul devrait être sur la même dimension que le plan Ω de l'image. Ainsi, la vitesse de convergence est relativement plus lente que les autres méthodes de segmentation. Le coût de calcul élevé peut être compensé par l'utilisation de plusieurs contours initiaux. L'utilisation de plusieurs contours initiaux augmente la vitesse de convergence en coopérant rapidement avec le contour voisin le plus proche.

Il faut noter qu'ils existent plusieurs modèle d'évolution de la courbe dans la littérature, à titre d'exemple on trouve :

1. Formulation proposée par Malladi et *al*.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = c.(\kappa + V_0)\|\nabla \Phi\|$$

Avec :

$$c = \frac{1}{1 + |\nabla(G_\sigma * I)|}$$

2. Formulation proposée par Casselles et *al*.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = c.(\kappa + V_0)\|\nabla \Phi\| + \nabla c.\nabla \Phi$$

Les avantages des Level-Sets :

- Prise en compte des changements de topologies automatique.
- Grandeurs géométriques intrinsèques (normales entrante/sortante, courbure) faciles à calculer.
- Extension à la 3D simple: il suffit d'ajouter une coordonnées à l'équation d'évolution de la fonction Φ: on a alors un volume $\Phi(x,y,z,t)$.
- Utilisation des méthodes numériques connues pour calculer les dérivées.

Les inconvenients des Level-Sets

L'implémentation implique plusieurs problèmes:

- On doit construire une fonction initiale $\Phi(x,y,z,t = 0)$ de manière à ce que son niveau zéro corresponde à la position initiale du contour.
- L'équation d'évolution n'est dérivée qu'au level set zéro, la fonction vitesse v n'est donc pas définie (en générale) pour les autres level sets.
- Parfois nécessaire de recalculer la fonction distance par rapport au niveau zéro.