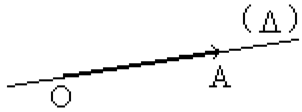
2. Les vecteurs

a. Définitions

Un *vecteur* $\overrightarrow{OA}$ est un segment de droite orienté. Il est caractérisé par :

- Une direction : celle de la droite (Δ) qui le porte ;
- Un sens : celui qui se dirige de O vers A ;
- Un point d'application : son origine au point O ;
- Une extrémité : sa fin au point A ;
- Un module : la longueur du segment [OA]. Soit $\overrightarrow{OA}(x, y, z)$, donc le module de $\overrightarrow{OA}$ est $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



Un *vecteur libre* est un vecteur qui se déplace librement dans l'espace en gardant la direction, le sens et son module.

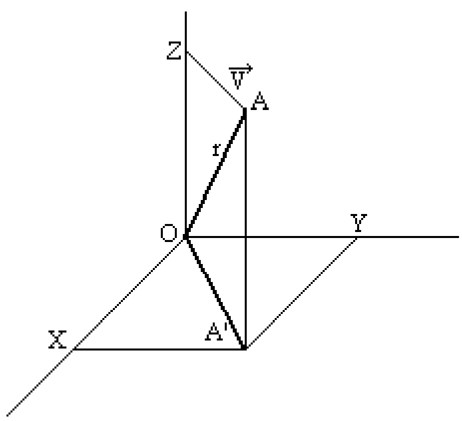
Un *vecteur unitaire* est un vecteur qui a pour module l'unité, soit $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = unité$.

b. Coordonnées d'un vecteur

Soit une base orthonormée $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On construit le vecteur $\overrightarrow{OA} = \vec{V}$.

Soient :

- $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = \left\|\vec{k}\right\| = unité$ modules des vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, perpendiculaires entre eux et portés respectivement sur les axes Ox, Oy et Oz ;
- $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \left\|\vec{V}\right\| = r$: longueur du segment [OA] ;
- $\overrightarrow{OA'}$: la projection de $\overrightarrow{OA}$ sur le plan (xOy) et le module de $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \rho$;
- $X\,\vec{i}$ est la projection de $\overrightarrow{OA'}$ sur l'axe Ox, $Y\,\vec{j}$ est la projection de $\overrightarrow{OA'}$ sur l'axe Oy et $Z\,\vec{k}$ est la projection de $\overrightarrow{OA}$ sur l'axe Oz ;
- ϕ est l'angle formé entre $\overrightarrow{OA}$ et l'axe Oz et θ est l'angle formé entre $\overrightarrow{OA'}$ et l'axe Ox.



Le vecteur $\vec{V}$ peut être écrit sous forme d'une somme vectorielle des trois (03) vecteurs.
Avec : X = ρ cos θ = r sin ϕ cos θ, Y = ρ sin θ = r sin ϕ sin θ et Z = r cos ϕ.
Le vecteur $\vec{V}$ peut être défini par les coordonnées cartésiennes (X, Y, Z) dont les vecteurs unitaires sont $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.

c. Propriétés des vecteurs

Soit une base orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les vecteurs $\vec{V_1}\,(x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{V_2}\,(x_2, y_2, z_2)$ ont les propriétés suivantes :

- $\vec{V_1}\,(x_1, y_1, z_1) = \vec{V_2}\,(x_2, y_2, z_2)$ si les vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ ont le même module, le même sens (lignes parallèles) et la même direction.
- $\vec{V_1}\,(x_1, y_1, z_1) + \vec{V_2}\,(x_2, y_2, z_2) = \vec{V_2}\,(x_2, y_2, z_2) + \vec{V_1}\,(x_1, y_1, z_1) = \vec{S}\,(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ ou graphiquement.
- $-\vec{V_1}\,(x_1, y_1, z_1) = \vec{V_1}\,(-x_1, -y_1, -z_1)$
- $\vec{V_1}\,(x_1, y_1, z_1) - \vec{V_2}\,(x_2, y_2, z_2) = \vec{D}\,(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$
- $\lambda \vec{V_1}\,(x_1, y_1, z_1) = \vec{V_1}\,(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)\, avec\ \lambda \in R$

d. Operations sur les vecteurs :

❖ Produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V_1}\,(x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{V_2}\,(x_2, y_2, z_2)$ est un ***scalaire*** ayant les propriétés suivantes :

- Notation : $\vec{V_1}.\vec{V_2}$
- Valeur : $\vec{V_1}.\vec{V_2} = \|\vec{V_1}\|.\|\vec{V_2}\|.\cos(\vec{V_1}, \vec{V_2})$
- Expression analytique :
  $\vec{V_1}.\vec{V_2} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}).(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

Donc, selon le signe de l'angle (θ) formé entre les deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$, le produit scalaire peut être :

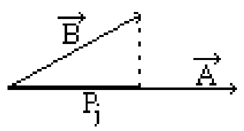
* si $\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \vec{V_1}.\vec{V_2} = \|\vec{V_1}\|.\|\vec{V_2}\|$: positif.

* si $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \vec{V_1}.\vec{V_2} = 0$: nul.

* si $\theta = \pi \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow \vec{V_1}.\vec{V_2} = -\|\vec{V_1}\|.\|\vec{V_2}\|$: négatif.

Projection d'un vecteur sur un autre : soit P_j la projection du vecteur $\vec{B}$ sur le vecteur $\vec{A}$.

On a : $\vec{A}.\vec{B} = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|.\cos(\vec{A}, \vec{B})$ et puisque : $\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{P_j}{\|\vec{B}\|}$ donc : $P_j = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{A}\|}$



- **Produit vectoriel de deux vecteurs**

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un ***vecteur*** $\vec{C}$ ayant les propriétés suivantes :

- Notation : $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C}$;
- Direction : perpendiculairement à $\vec{A}$ et $\vec{B}$ simultanément ;
- Module : $\|\vec{C}\| = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|.\sin(\vec{A}, \vec{B})$;
- Sens : déterminé par la règle de tire- bouchon ;
- Signification : représente la surface de parallélogramme construit sur la base des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Expression analytique :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix} = \vec{i}.\begin{vmatrix} y_A & z_A \\ y_B & z_B \end{vmatrix} - \vec{j}.\begin{vmatrix} x_A & z_A \\ x_B & z_B \end{vmatrix} + \vec{k}.\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix}$$

$$= (y_A.z_B - y_B.z_A).\vec{i} - (x_A.z_B - x_B.z_A).\vec{j} + (x_A.y_B - x_B.y_A).\vec{k}$$

- **Produit mixte de trois vecteurs**

Le produit mixte de trois vecteurs $\vec{V_1}\,(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{V_2}\,(x_2, y_2, z_2)$ et $\vec{V_3}\,(x_3, y_3, z_3)$ est un ***scalaire*** défini par :

$$\vec{V_1}.(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) = \|\vec{V_1}\|.\|\vec{V_2}\|.\|\vec{V_2}\|.\cos(\vec{V_1}, \vec{V_2} \wedge \vec{V_3}).\sin(\vec{V_2}, \vec{V_3})$$

Le produit mixte peut être exprimé aussi sous forme d'un déterminant :

$$\vec{V_1}.(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 + x_3 y_1 z_2 + x_2 y_3 z_1 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3 - x_1 y_3 z_2$$

Signification : la valeur $\left|\vec{V_1}.(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3})\right|$ représente le volume du parallélépipède construit sur la base des vecteurs $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$