

MECANIQUE DES FLUIDES

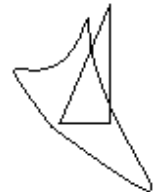
Les fluides sont des corps (liquides et gaz) qui, n'ayant pas de forme propre, sont facilement déformables sous l'action de très faibles contraintes (forces) extérieures. La mécanique des fluides se compose de l'étude des fluides au repos (hydrostatique) et des fluides en mouvement (hydrodynamique). Les applications de la mécanique des fluides sont très importantes notamment dans la biologie, la marine, les sciences de la nature et de la vie, l'océanographie, la météorologie, la médecine, ...etc.

Une masse donnée d'un fluide ne garde pas une forme bien déterminée (comme dans le cas des solides) mais varie avec la forme du vase dans lequel elle se trouve. Pour cela, les notions de masse et de force utilisées en mécanique newtonienne seront substituées respectivement aux notions de masse volumique et de pression.

1. Définition

Les fluides ne sont pas rigides et ne peuvent pas rester longtemps au repos sous l'action de forces extérieures. Un fluide est au repos seulement lorsqu'il n'existe pas de forces parallèles appliquées sur lui. Toute force exercée sur ou par un fluide doit être perpendiculaire à la surface sur laquelle il agit.

Soit (S) une surface plane d'un fluide. On exerce sur elle une force quelconque \vec{F} .



Cette force peut être décomposée en une somme vectorielle : une force perpendiculaire (\vec{F}_\perp) à la surface (S) et une force parallèle à cette surface (\vec{F}_\parallel) telles que : $\vec{F} = \vec{F}_\perp + \vec{F}_\parallel$

Lorsque $\vec{F}_\parallel \neq \vec{0}$, l'écoulement du fluide aura bien lieu.

Lorsque $\vec{F}_\parallel = \vec{0}$ ($\vec{F} = \vec{F}_\perp$), la force \vec{F} est perpendiculaire à la surface (S) et le fluide se trouve alors au repos.

Donc, le déplacement d'un fluide est conditionné par l'existence d'une force parallèle appliquée sur sa surface.

2. Pression

La pression est la force qui s'exerce par unité de surface : $P = \frac{F}{S}$

où F est la force s'exerçant perpendiculairement à la surface et S est l'aire sur laquelle la force \vec{F} est appliquée.

- Par analyse dimensionnelle : $[P] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$
- L'unité de la pression dans le Système International :
1 Pascal = 1 Pa = 1 kg/ms² = 1 N/m².

Pression atmosphérique : La pression atmosphérique est le poids de l'air exercé sur 1 m² de la surface de la Terre. Plus on s'éloigne de la surface de la Terre, plus il y a moins de molécules d'air. Donc la pression diminue avec l'altitude h .

A $T = 0^\circ\text{C}$ et au niveau de la mer ($h = 0\text{ m}$) : On a $P = P_0 = 1\text{ atmosphere} = 1\text{ atm}$.

Autres unités de la pression: $1\text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5\text{ N/m}^2 = 1,013 \cdot 10^5\text{ Pa} = 1,013\text{ bar}$
 $= 760\text{ mm.Hg} = 760\text{ Torr}$.

Lorsqu'on remplit un tube avec du mercure, ensuite on le plonge, inversé, dans un vase rempli du mercure, ce dernier descend jusqu'à la hauteur $H = 0,76\text{ m} = 760\text{ mm}$, et dans la partie supérieure de ce tube la pression est nulle (il n'y a pas d'air).

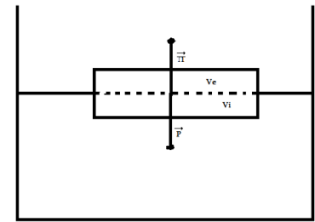
En répétant la même expérience avec un vase plein d'eau, la hauteur d'ascension sera de 10,1 m.

Plus la densité du liquide utilisé est petite, plus la hauteur de la colonne est importante. C'est pour cela que, de point de vue pratique, dans la plupart des appareils de mesure de la pression on utilise le mercure (de densité très grande = 13,6).

3. Poussée d'Archimède :

Lorsque un corps solide est plongé dans un fluide, il reçoit une poussée (force) verticale, dirigée vers le haut et égale au poids du fluide déplacé.

On a : Le poids du corps est : $P = \rho V g = \rho (V_i + V_e) g$. La poussée d'Archimède est : $\pi = \rho_0 V_i g$ où ρ est la masse volumique du corps et ρ_0 celle du fluide, V_i est le volume immergé et V_e est le volume émergé.



A l'équilibre on a :

$$\pi = P \Rightarrow \rho_0 V_i g = \rho (V_i + V_e) g \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{V_i}{(V_i + V_e)}$$

Selon les valeurs de ρ et ρ_0 , on distingue les phénomènes suivants:

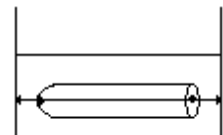
- Lorsque $\rho > \rho_0$ on a une immersion : le corps solide se trouve complètement immergé dans le fluide.
- Lorsque $\rho < \rho_0$ on a une flottaison : le corps solide flotte à la surface du liquide (une partie se trouve dans le fluide et l'autre dans l'air).
- Lorsque $\rho \approx \rho_0$ on a une suspension (cas de certains médicaments : sirops).

4. Loi de Pascal :

En absence de gravité la pression dans un fluide au repos est : la même en tout point.

Au repos la somme vectorielle de toutes les forces perpendiculaires à la surface latérale du cylindre est nulle : $\sum \vec{F}_{\perp \text{ cylindre}} = \vec{0}$

De même, la résultante des forces parallèles à l'axe du cylindre est égale à nulle : $\sum \vec{F}_{\parallel \text{ cylindre}} = \vec{0}$



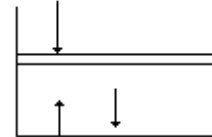
$\sum \vec{F}(\text{cylindre}) = \vec{0}$ car, en raison de symétrie, pour chaque force appliquée perpendiculairement ou parallèlement à l'axe, il existe une force qui lui est égale en module, mais du sens opposé, de sorte que la somme vectorielle est égale à $\vec{0}$.

En absence de gravité la pression dans un fluide au repos est la même en tout point.

5. Pression hydrostatique :

Soit un cylindre contenant un fluide. Soit \vec{F} une force perpendiculaire au piston de section S et de masse négligeable.

La pression sous le piston est P_0 tel que : $P_0 = \frac{F}{S}$ où S est la section du piston.



L'équilibre du fluide se traduit par :

$$\vec{R}_N + \vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$$

Après projection :

$$P_H = \frac{R_N}{S} = \frac{P}{S} + \frac{F}{S} = \frac{\rho g V}{S} + P_0 \Rightarrow P_H = \frac{\rho g S H}{S} + P_0 \Rightarrow P_H = \rho g H + P_0$$

Donc la pression dans un fluide augmente avec la profondeur.

Loi : La pression dans un fluide au repos est la même en tout point situé sur une même horizontale.

La pression à la profondeur H est donnée par : $P_H = \rho g H + P_0$ lorsque H est constant, la pression à cette profondeur est constante.

6. Appareils de mesure de la pression

a. Baromètre : Le baromètre est un appareil de mesure de la pression atmosphérique P_0 .

Exemple. Baromètre à mercure :

La pression à la surface du mercure est égale à la pression atmosphérique P_0 . Comme le fluide est au repos, la pression aux points situés sur la même horizontale que cette surface est égale aussi à P_0 (même pour les points situés à l'intérieur du tube). La pression dans la partie supérieure du tube est nulle. Donc, en appliquant la loi de la pression hydrostatique on trouve :

$$P_0 = 0 + \rho g H = 13600 \cdot 9,81 \cdot 0,76 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

Avec : $\rho = 13600 \text{ kg/m}^3$ est la masse volumique du mercure ; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ est l'accélération de la pesanteur ; $H = 0,76 \text{ m}$ est la colonne du mercure dans le tube.

b. Manomètre : Il mesure la différence entre la pression absolue P dans le fluide et la pression atmosphérique P_0 . Il est constitué d'un tube en U dans lequel se trouve une certaine quantité du mercure. Une branche de ce tube est introduite dans un réservoir contenant un fluide (gaz ou liquide) pour lequel on veut mesurer la pression P .

L'autre branche est à la pression atmosphérique P_0 . Le manomètre nous donne directement la différence de ces deux pressions : $\overline{P} = P - P_0$. Cette différence de pressions est souvent appelée pression de jauge.

Les points à l'intérieur du tube, se trouvant sur la même horizontale que le point A, sont à la même pression.

On a :

$$P + \rho g h_1 = P_0 + \rho g h_2 \Rightarrow P = P_0 + \rho g (h_2 - h_1) \Rightarrow P = P_0 + \rho g H \Rightarrow \overline{P} = P - P_0 = \rho g H$$

c. Sphygmomanomètre (Tensiomètre) : Il est constitué d'un manomètre et d'un stéthoscope. Il sert à mesurer la tension (pression) artérielle. Pendant le cycle cardiaque la pression dans le cœur passe par un maximum (pompage) et un minimum (relaxation c'est à dire que le cœur est plein du sang).

La pression maximale est la pression *systolique* tandis que la pression minimale est dite pression *diastolique*.

Généralement on mesure la tension artérielle au niveau du bras car il contient un seul os (humérus), ce qui n'empêche pas de comprimer à volonté l'artère humérale. L'autre raison de ce choix est le fait que le bras et le cœur se trouvent sur la même horizontale. En comprimant le bras, la pression dans l'artère humérale (située au niveau du bras) augmente jusqu'à une certaine valeur qui déclenche sa fermeture. Ensuite, on fait diminuer lentement la pression et lorsque sa valeur sera légèrement inférieure à celle du cœur (pression systolique) l'artère s'ouvre brièvement et on entend un écoulement turbulent du sang.

Pour un adulte au repos et en bonne santé : $\frac{P_{\max}}{P_{\min}} \approx \frac{14}{09} \text{ KPa}.$

A partir du $\frac{15}{11} \text{ KPa}$ on dit que le sujet est hypertonique (hypertension).

Les pressions mesurées aux niveaux du cerveau, du cœur et des pieds d'un sujet en position droite sont respectivement 9,3 ; 13,3 et 26,8 kPa. Lorsque le sujet est en position allongée les pressions mesurées sont 13,2 kPa (cerveau), 13,3 kPa (cœur) et 13,1 KPa (pieds).

7. Applications

a. Vases communicants : La surface libre d'un fluide est horizontale quelles que soient la section et la forme géométrique du vase qui le contient. Tous les points de la surface libre sont à la même pression P_0 , et ceux se trouvant sur la même horizontale (par exemple sur (XX')), le sont aussi. C'est à dire $P_A = P_B = P_C = P_D$

Dans le cas où le vase contient plusieurs liquides non miscibles, de différentes masses volumiques, les points se trouvant sur une même horizontale ne peuvent pas être à la même pression s'ils n'appartiennent pas à un même liquide.

Soit, par exemple un tube en U dans lequel se trouvent trois (3) liquides de masses volumiques ρ_1 , ρ_2 et ρ_3 . Les hauteurs des colonnes de ces fluides dans le tube sont respectivement h_1 , h_2 et h_3 .

Les points H et F sont dans le même liquide et sur une même horizontale, donc les pressions en ces points sont égales ($P_F = P_H$). Les points E et G sont sur une même horizontale mais pas dans le même liquide et les pressions en ces points sont différentes ($P_G \neq P_E$).

Comme $P_F = P_0 + \rho_3 g h_3$ et $P_H = P_0 + \rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_1$, on obtient : $\rho_3 h_3 = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2$

b. Presse hydraulique : Elle est constituée de deux (2) cylindres communicants de sections S et s . A l'équilibre, les pressions sous les pistons sont égales car les points A et B sont situés sur une même horizontale. Lorsqu'on exerce une petite force sur le piston de section s , le piston de section S s'élève. Donc, la presse hydraulique est utilisée pour soulever des charges lourdes.

On a à l'équilibre : $P_A = P_B \Rightarrow \frac{F}{S} = \frac{f}{s} \Rightarrow F = \left(\frac{S}{s}\right)f$

8. Le débit

Le mouvement d'un liquide idéal dans un tuyau de section S est caractérisé par son débit Q .

Le débit est le quotient de la quantité de fluide qui traverse une section droite de la conduite par la durée de cet écoulement.

Débit massique : Si Δm est la masse de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le temps Δt , par définition le débit massique est : $Q = \frac{\Delta m}{\Delta t}$ dont l'unité : kg.s^{-1}

Débit volumique : Si ΔV est le volume de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le temps Δt , par définition le débit volumique est : $Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ dont unité : $\text{m}^3.\text{s}^{-1}$.

Si S la section du tube (S constante). Le liquide se déplace une distance Δx pendant un temps Δt . Le volume du liquide sortant du tube est :

$$\Delta V = S. \Delta x = S. v. \Delta t$$

Et puisque : $\Delta V = Q. \Delta t$

Donc : $Q = S. v$

9. L'équation de continuité

Dans un circuit circulaire d'un fluide dont la section est variable d'un endroit à l'autre, la vitesse circulaire v est également variable, mais le débit doit rester constant (il s'agit d'un tube rigide et non déformable) en suivant le principe que la quantité de liquide qui entre à une extrémité du circuit doit ressortir à l'autre bout.

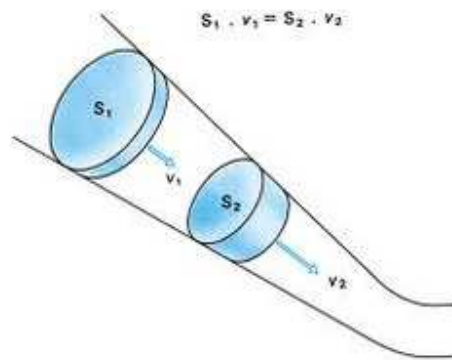
Pour une surface fermée : débit massique entrant = débit massique sortant i.e :

$$Q_{mA} = Q_{mB} \Rightarrow \frac{\Delta m_A}{\Delta t_A} = \frac{\Delta m_B}{\Delta t_B} \Rightarrow \frac{\rho \cdot \Delta V_A}{\Delta t_A} = \frac{\rho \cdot \Delta V_B}{\Delta t_B} \Rightarrow \frac{\rho \cdot S_A \cdot \Delta x_A}{\Delta t_A} = \frac{\rho \cdot S_B \cdot \Delta x_B}{\Delta t_B}$$

$$\Rightarrow S_A \cdot v_A = S_B \cdot v_B$$

L'équation de continuité qui découle exprime que le produit de la section et de la vitesse est constant en tout point du circuit et égal au débit :

$$Q = S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 = Cste$$



10. L'énergie mécanique d'un fluide

Un liquide en mouvement possède trois formes d'énergie mécanique liées respectivement à la pression, à l'altitude et à la vitesse. Pour les deux premières il s'agit d'énergie potentielle et pour la troisième, d'énergie cinétique.

On exprime généralement ces formes d'énergie en unités de pression (c'est en fait l'énergie par unité de volume : $\text{Jm}^{-3} = \text{Pa}$).

L'énergie potentielle comporte donc deux termes :

- l'énergie liée à la pression : $Ep_1 = p$
- l'énergie liée à l'altitude : $Ep_2 = \rho g z$

L'énergie cinétique découle de la vitesse circulaire v : $Ec = \frac{1}{2} \rho v^2$

L'énergie mécanique totale du fluide est alors la somme de ces trois termes :

$$E_m = P + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2$$

11. Le théorème de Bernoulli

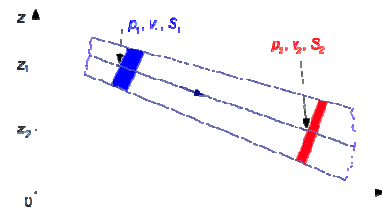
Ce théorème exprime simplement que l'énergie mécanique totale d'un fluide idéal (sans perte de charge) est constante dans un circuit dans lequel il circule à débit constant (au cours du temps).

$$E_m = P + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = Cste$$

C'est donc la transposition, à un fluide en mouvement, de la loi de Pascal valable pour un fluide statique (si $v = 0$ le théorème de Bernoulli se réduit à $P + \rho g z = Cste$)

Les différentes formes d'énergie (potentielles et cinétique) peuvent par contre se transformer les unes dans les autres, à condition que l'énergie totale reste constante :

$$P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$



les conditions d'application du théorème de Bernoulli sont:

- fluide incompressible et densité constante;
- fluide non visqueux (pas de frottements) donc pas de perte de charge (perte de pression);
- fluide en écoulement stationnaire (vitesse d'écoulement constante) et non turbulent.

12. Applications du théorème de Bernoulli :

a. Vase de Torricelli

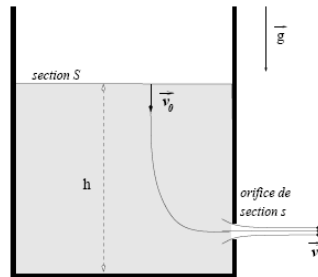
Considérons un réservoir cylindrique rempli d'un liquide dans lequel on perce un orifice. La formule de Torricelli relie le débit d'écoulement avec la hauteur de liquide h .

L'application du théorème de Bernoulli entre les points A et B donne :

$$P_A + \rho g h_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_B + \rho g h_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

Puisque : $P_A = P_B = P_{atm}$; $v_A \ll v_B$ d'où :

$$\frac{1}{2} \rho v_B^2 = \rho g h_A - \rho g h_B \Rightarrow v_B = \sqrt{2g(h_A - h_B)}$$



b. Effet Venturi

Certains dispositifs mettent à profit les propriétés décrites par le théorème de Bernoulli pour mesurer la vitesse circulaire d'un liquide.

Le tube étant supposé horizontal ($Z_1 = Z_2 = Z_3$) le théorème de Bernoulli se réduit à :

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

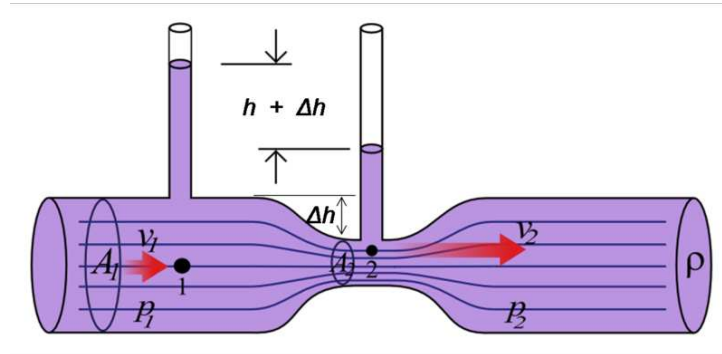
soit : $\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$

En appliquant alors l'équation de continuité : $S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$, on aboutit à :

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left[\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right]$$

relation qui exprime que la chute de pression réalisée au niveau de la partie resserrée du tube est proportionnelle au carré de la vitesse circulaire dans la partie large du tube (S_1 , S_2 et ρ étant des constantes). Cette propriété permet d'utiliser le tube de Venturi pour la mesure des vitesses circulatoires, la valeur de cette vitesse étant déduite de la dépression mesurée sur les manomètres. Pour

passer au débit, il suffit de multiplier par la surface de section S_1 du tube dans sa partie large.



c. Tube de Pitot

On considère un liquide en écoulement permanent dans une canalisation et deux tubes plongeant dans le liquide, l'un débouchant en A face au courant, et l'autre en B est le long des lignes de courant, les deux extrémités étant à la même hauteur. Au point B, le liquide a la même vitesse v que dans la canalisation et la pression est la même que celle du liquide $p_B = p$.

En A, point d'arrêt, la vitesse est nulle et la pression est p_A .

L'application du théorème de Bernoulli entre les points A et B donne :

$$P_A + \rho g h_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_B + \rho g h_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

Puisque : $h_A = h_B$: même horizontale ; $v_A = 0$: point de prise de pression d'où :

$$P_A = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

L'application du théorème de Pascal pour les A et B :

$$P_A = P_0 + \rho g z_A \text{ et } P_B = P_0 + \rho g z_B$$

Puisque : $z_A - z_B = H$ d'où :

$$P_A = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \rho v_B^2 = \rho g H$$

En mesurant la dénivellation H du liquide dans les deux tubes, on peut en déduire la vitesse v d'écoulement du fluide.

