a. Calcul d'incertitude

<u>*1 er cas :*</u> Lorsque la grandeur G est mesurée directement à l'aide d'un appareil de mesure. Dans ce cas, l'erreur globale est minimale commise est l'incertitude de la mesure. Elle est égale à :

$$|\Delta G| = |\Delta G|_s + |\Delta G|_l + |\Delta G|_i$$

Avec : $|\Delta G|_s$ est l'erreur systématique, $|\Delta G|_l$ est l'erreur de lecture et $|\Delta G|_i$ est l'erreur instrumentale.

Exemple : La mesure avec une burette est de 80 graduations sur 100 graduations.

- *Quelle est le volume mesuré lorsque la burette est de 10mL?*
- *Quelles sont les incertitudes absolue et relative de cette mesure ?*
- *Si la graduation lue par le lecteur est n=79, quelle est l'erreur de lecture commise ?*
- *Calculer l'erreur globale commise lors de cette mesure?*

Corrigé :

- *80 graduations sur l'échelle N=100 graduations.*

Le volume est 100 graduations → 10mL

80 graduations → V

Alors V= 8mL

- *Incertitude absolue : ΔV = 0,1/10=0,01mL*
- *Incertitude relative : ε (%) = (ΔV/V)x100 =1/8 =0,125%*
- *La valeur lue est: 100 graduations → 10mL*
  79 graduations → V'
  Alors V'= 7,9mL
  L'erreur de lecture est ΔV= 8-7,9 = 0,1mL
- *L'erreur globale est: ΔV = $|\Delta Vs|$ + $|\Delta Vl|$ = 0,01+0,1 =0,11mL*

<u>*$2^{ème}$ cas :*</u> lorsque la grandeur G est déduite de la mesure et des valeurs connues d'autres grandeurs X, Y et Z à partir d'une relation de forme : G = G (X, Y, Z)

L'incertitude absolue s'écrit à l'aide d'une expression analogue à celle de la différentielle totale de G = G (X, Y, Z).

On à :

$$G = G(X,Y,Z) \Rightarrow dG = \left(\frac{\partial G}{\partial X}\right)_{Y,Z} dX + \left(\frac{\partial G}{\partial Y}\right)_{X,Z} dY + \left(\frac{\partial G}{\partial Z}\right)_{X,Y} dZ$$

$$\Rightarrow |\Delta G| = \left|\left(\frac{\partial G}{\partial X}\right)_{Y,Z}\right| |\Delta X| + \left|\left(\frac{\partial G}{\partial Y}\right)_{X,Z}\right| |\Delta Y| + \left|\left(\frac{\partial G}{\partial Z}\right)_{X,Y}\right| |\Delta Z|$$

Une autre méthode de calcul pratique permet de d'estimer ces incertitudes (relatives et absolues), il s'agit de la différentielle de la fonction logarithmique $d(lnG) = \frac{dG}{G}$

Exemple : Soient deux (02) résistances R_1 et R_2 respectivement 10Ω et 100Ω montées en parallèle. Elles sont mesurées avec une précision de 1%. Calculer la résistance équivalente R, ΔR et $\frac{\Delta R}{R}$?

Corrigé :

1. *La résistance équivalente R :*

Les résistances R_1 et R_2 sont montées en parallèle : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Longrightarrow R = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$

Application numérique :

$$\left.\begin{matrix} R_1 = 10\Omega \\ R_2 = 100\Omega \end{matrix}\right\} \Longrightarrow R = \frac{10*100}{10+100} \Longrightarrow R = 9{,}09\Omega$$

2. *L'incertitude absolue ΔR et l'incertitude relative $\frac{\Delta R}{R}$:*

- ✓ *La méthode de la différentielle totale $\left(\Delta R \longrightarrow \frac{\Delta R}{R}\right)$*

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \Longrightarrow dR = \left(\frac{\partial R}{\partial R_1}\right) dR_1 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_2}\right) dR_2$$

avec : $\left(\frac{\partial R}{\partial R_1}\right) = \frac{R_2(R_1+R_2)-(R_1R_2)}{(R_1+R_2)^2} \Longrightarrow \frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{(R_2)^2}{(R_1+R_2)^2}$; $\left(\frac{\partial R}{\partial R_2}\right) = \frac{R_1(R_1+R_2)-(R_1R_2)}{(R_1+R_2)^2} \Longrightarrow \frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{(R_1)^2}{(R_1+R_2)^2}$

$$\Longrightarrow dR = \left(\frac{(R_2)^2}{(R_1+R_2)^2}\right) dR_1 + \left(\frac{(R_1)^2}{(R_1+R_2)^2}\right) dR_2 \Longrightarrow \Delta R = \left|\frac{(R_2)^2}{(R_1+R_2)^2}\right| |\Delta R_1| + \left|\frac{(R_1)^2}{(R_1+R_2)^2}\right| |\Delta R_2|$$

Où : $\frac{\Delta R_1}{R_1} = 1\% \Longrightarrow \frac{\Delta R_1}{R_1} = 0{,}01 \Longrightarrow \Delta R_1 = 0{,}01 * R_1$; $\frac{\Delta R_2}{R_2} = 1\% \Longrightarrow \frac{\Delta R_2}{R_2} = 0{,}01 \Longrightarrow \Delta R_2 = 0{,}01 * R_2$;

Application numérique :

$$\left.\begin{matrix} R_1 = 10\Omega \\ R_2 = 100\Omega \\ R = 9{,}09\Omega \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{matrix} \Delta R_1 = 0{,}01 * R_1 \Longrightarrow \Delta R_1 = 0{,}01 * 10 \Longrightarrow \Delta R_1 = 0{,}1\Omega \\ \Delta R_2 = 0{,}01 * R_2 \Longrightarrow \Delta R_2 = 0{,}01 * 100 \Longrightarrow \Delta R_2 = 1\Omega \\ \Delta R = \left(\frac{(100)^2}{(10+100)^2}\right) * 0{,}1 + \left(\frac{(10)^2}{(10+100)^2}\right) * 1 \Longrightarrow \Delta R = 0{,}09\Omega \\ \Longrightarrow \frac{\Delta R}{R} = \frac{0{,}09}{9{,}09} \Longrightarrow \frac{\Delta R}{R} = \frac{0{,}09}{9{,}09} \Longrightarrow \frac{\Delta R}{R} = 0{,}01 = 1\% \end{matrix}\right.$$

- ✓ *La méthode de la différentielle de la fonction logarithmique $\left(\frac{\Delta R}{R} \longrightarrow \Delta R\right)$*

$$ln(R) = ln\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right) \Rightarrow ln(R) = ln(R_1R_2) - ln(R_1+R_2) \Rightarrow ln(R) = ln(R_1) + ln(R_2) - ln(R_1+R_2)$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{R} = \frac{dR_1}{R_1} + \frac{dR_2}{R_2} - \frac{d(R_1+R_2)}{(R_1+R_2)} \Rightarrow \frac{dR}{R} = \frac{dR_1}{R_1} + \frac{dR_2}{R_2} + \frac{-dR_1}{(R_1+R_2)} + \frac{-dR_2}{(R_1+R_2)}$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{R} = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{(R_1+R_2)}\right)dR_1 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{(R_1+R_2)}\right)dR_2$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = \left|\frac{1}{R_1} - \frac{1}{(R_1+R_2)}\right| |\Delta R_1| + \left|\frac{1}{R_2} - \frac{1}{(R_1+R_2)}\right| |\Delta R_2|$$

Application numérique :

$$\left.\begin{matrix} R_1 = 10\Omega \\ R_2 = 100\Omega \\ R = 9{,}09\Omega \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\Delta R}{R} = \left|\dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{(10+100)}\right| * |0{,}1| + \left|\dfrac{1}{100} - \dfrac{1}{(10+100)}\right| * |1| \Rightarrow \dfrac{\Delta R}{R} = 0{,}01 = 1\% \\ \dfrac{\Delta R}{R} = 0{,}01 \Rightarrow \Delta R = 0{,}01 * R \Rightarrow \Delta R = 0{,}01 * 9{,}09 \Rightarrow \Delta R = 0{,}09\Omega \end{cases}$$

3^ème^ cas : lorsque les erreurs sont aléatoires (erreurs de sensibilité, erreurs de fidélité, …) on utilise la méthode statistique en répétant (n) fois la même mesure de la grandeur X et on prend la moyenne :

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Et chaque mesure s'écarte de la valeur moyenne $\overline{X}$ d'une quantité $\Delta X_i = X_i - \overline{X}$. On peut prendre alors comme erreur l'écart moyen $\overline{\Delta X}$ défini par :

$$\overline{\Delta X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left|X_i - \overline{X}\right|}{n}$$

Et l'intervalle $\left[\overline{X} - \overline{\Delta X}, \overline{X} + \overline{\Delta X}\right]$ s'appelle l'intervalle de confiance de la mesure.

$\overline{X} - \overline{\Delta X}$ $\overline{X}$ $\overline{X} + \overline{\Delta X}$

Intervalle de confiance

Exemple : Pour manque de fidélité de notre ampèremètre, on répète 5 fois la mesure de l'intensité du courant électrique (en mA) qui traverse une résistance R. Les résultats obtenus sont : 101,00 ; 102,30 ; 99,80 ; 100,90 ; 98,50.

Quel est l'intervalle de confidence de la mesure ?

Corrigé :

Par définition de l'intervalle de confiance : $\left[\overline{i} - \overline{\Delta i}, \overline{i} + \overline{\Delta i}\right]$

- *Calcul de* $\bar{I}$ *: Par définition de la moyenne :* $\bar{i}=\frac{\sum_{a=1}^{5} i_a}{5}$

Application numérique : $\bar{i}=\frac{101{,}00+102{,}30+99{,}80+100{,}90+98{,}50}{5} \Rightarrow \bar{i}=100{,}50\,mA$

- *Calcul de* $\overline{\Delta I}$ *: Par définition de l'écart moyen :* $\overline{\Delta i}=\frac{\sum_{a=1}^{5}\left|i_a-\bar{i}\right|}{5}$

Application numérique :

$$\overline{\Delta i}=\frac{|101{,}00-100{,}5|+|102{,}30-100{,}5|+|99{,}80-100{,}5|+|100{,}90-100{,}5|+|98{,}50-100{,}5|}{5}$$

$$\Rightarrow \overline{\Delta i}=1{,}08\,mA$$

Finalement, l'intervalle de confiance de cette mesure est :

Application numérique : $\left[\bar{i}-\overline{\Delta i}\,,\bar{i}+\overline{\Delta i}\right]\equiv[100{,}5-1{,}08;100{,}5+1{,}08]\equiv[99{,}42;101{,}58]$