



Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

Faculté de Génie Mécanique et de Génie des Procédés
Filière Génie des Procédés (GP)
2^{ème} année LMD :

Notions des Phénomènes de Transfert

2016/2017

Fait par : M. A. BOUTRA

Notions des Phénomènes de Transfert

Programme

Chapitre I : Introduction aux modes de transfert

Chapitre II : Transfert de masse

**Transfert de matière par diffusion moléculaire,
Transfert de matière par convection**

Chapitre III : Transfert de chaleur

Conduction, Convection, Rayonnement

~~Chapitre IV : Transferts de quantité de mouvement~~

Notions des Phénomènes de Transfert

I. Introduction aux phénomènes de transfert

Définitions

I.1 Différents phénomènes de transfert

a) Transfert de chaleur (thermique)

b) Transfert de matière (massique)

c) Transfert de quantité de mouvement

I.2 Différents modes de transfert

a) Transfert par conduction

b) Transfert par convection

c) Transfert par rayonnement

I. Introduction aux phénomènes de transfert

Définitions

Un phénomène de transfert (ou phénomène de transport) est un **phénomène irréversible** durant lequel une **grandeur physique est transportée** par le biais de molécules et qui **a pour origine l'inhomogénéité d'une grandeur intensive**. C'est la tendance spontanée des systèmes physiques et chimiques à rendre uniformes ces grandeurs qui provoquent le transport.

L'étude de chaque phénomène de transport se réfère à une certaine entité (caractéristique) transférée, par exemple : la quantité de mouvement nécessaire pour augmenter la vitesse d'un fluide, la chaleur afin de vaporiser un liquide et la masse du liquide transportée dans une conduite ou la dispersion d'un liquide coloré au sein d'un autre liquide transparent.

Les grandeurs physiques transférées les plus connues sont la chaleur (transfert thermique), la matière (transfert de masse) et la quantité de mouvement.

Les corps qui assurent le transfert de ces grandeurs physiques sont appelés porteurs de charge.

I. Introduction aux phénomènes de transfert

I.1 Différents phénomènes de transfert

Les phénomènes de transfert les plus connus sont :

a) Transfert de chaleur (thermique) : Pour lequel la grandeur transférée est la chaleur (Température), ce transfert s'effectue entre deux zones où règnent des températures différentes : il se fait toujours de la température la plus élevée vers la température la plus basse (moins élevée). La différence de température est appelée : la **force motrice** du transfert thermique.

b) Transfert de masse (de matière) : Pour lequel la grandeur transférée est la matière (Concentration massique), ce transfert s'effectue entre deux zones où règnent des concentrations massiques différentes, il se fait toujours de la concentration plus élevée vers la concentration la plus faible. La différence de concentration est appelée: **la force motrice** du transfert de masse.

b) Transfert de de quantité de mouvement: Pour lequel la grandeur transférée est la quantité de mouvement (Vitesse), ce transfert s'effectue entre deux entités qui possèdent des vitesses différentes, il se fait toujours de l'entité qui a la vitesse la plus élevée vers celle qui a la vitesse la plus faible. La différence de vitesse appelée: la **force motrice** du transfert de quantité de mouvement.

I. Introduction aux phénomènes de transfert

I.2 Différents modes de transfert

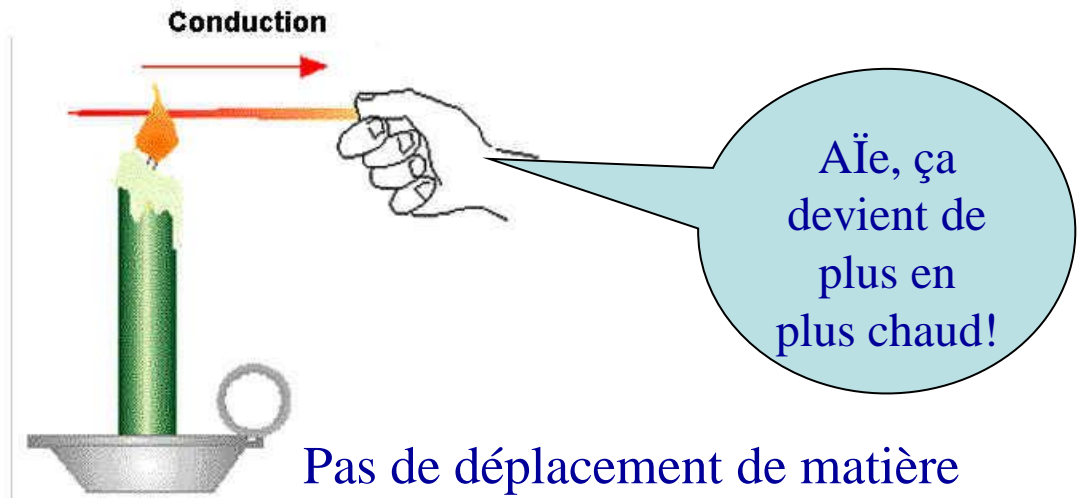
On distingue trois modes de transfert :

a) Transfert par conduction (diffusion moléculaire pour le TM) : La conduction est un mode de transfert d'énergie thermique qui ne nécessite pas de mouvements de matière. La chaleur est transférée de proche en proche par simple agitation des atomes. Plus la différence de température (**force motrice**) entre deux matériaux est importante, plus ce transfert sera efficace. Par contre, il dépend aussi de la conductivité thermique des matériaux.

Donc **le transfert de chaleur**, il se fait à partir d'un contact direct entre **deux solides immobiles** portés à **deux températures différentes**.

Exemples:

➤ Un enfant qui touche une tige métallique chaude, la chaleur passe directement de la tige à la main de l'enfant car il y'a un gradient de température entre la tige métallique et la main de l'enfant



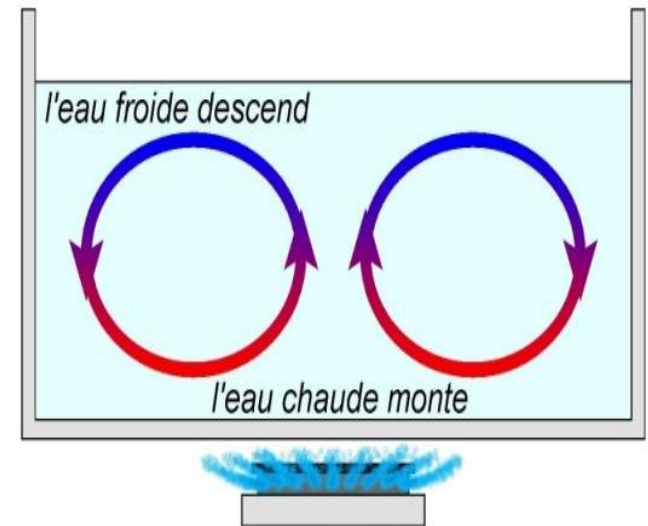
I. Introduction aux phénomènes de transfert

b) Transfert par convection : l'échange de chaleur entre une surface et un fluide mobile à son contact, ou le déplacement de chaleur au sein d'un fluide par le mouvement d'ensemble de ses molécules d'un point à un autre. Dans le processus de convection, la chaleur se déplace comme toujours des zones chaudes vers les zones froides.

- La convection = transfert de chaleur avec transfert de matière.
- Phénomène très usuel (météo, chauffage domestique...)
- Ils sont à l'origine de certains phénomènes océanographiques (courants marins), météorologiques (orages), géologiques (remontées de magma).

Exemples:

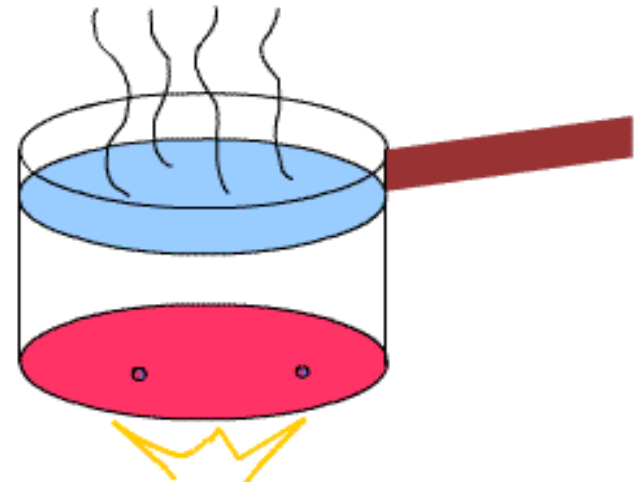
- C'est par convection que la chaleur, transmise à de l'eau à l'intérieur d'une chaudière, est transportée jusqu'aux différentes pièces d'un appartement.
- C'est par convection qu'un produit chimique est transporté du réservoir dans lequel il est stocké jusqu'à l'appareil dans lequel il est utilisé.



I. Introduction aux phénomènes de transfert



Si on chauffe une casserole par le haut, il n'y aura pas de convection, mais il y aura conduction parce que le fluide chaud sera déjà en haut.

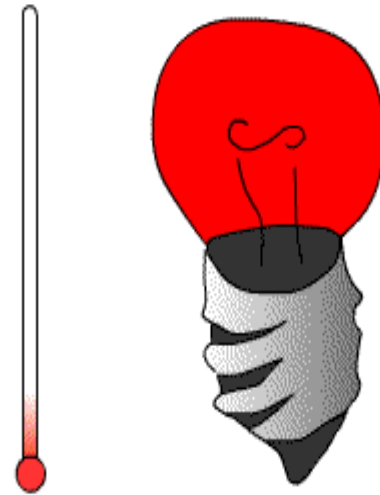


I. Introduction aux phénomènes de transfert

c) **Transfert par Rayonnement** : le rayonnement constitue un mode original du transfert, spécifique à l'énergie thermique. Un point matériel chauffé émet un **rayonnement électromagnétique** dans toutes les directions, lorsque ce rayonnement frappe un corps quelconque, ce dernier peut **en réfléchir** une partie et en **absorber** une autre sous **forme de chaleur** qu'il va utiliser pour **élever sa température**. Ce type de transport de chaleur est analogue à la propagation de la lumière et **ne nécessite aucun support matériel** contrairement aux deux premiers modes de transfert. Les gaz, les liquides et les solides sont capables d'émettre et d'absorber les rayonnements thermiques.

Exemples:

- La chaleur que reçoit la terre à partir du soleil se fait grâce aux rayonnements.
- Les plats sont chauffés dans un four à micro-ondes grâce à la chaleur transportée par des rayonnements micro-ondes.



A distance qu'il y ait ou non de la matière

Notions des Phénomènes de Transfert

II. Transfert de masse

Introduction

II.1 Équations de bilan pour un mélange

- a) Définitions des concentrations et des densités de flux de masse*
- b) Loi de diffusion de Fick pour un mélange*
- c) Coefficient de diffusion \mathcal{D}_{AB}*
- d) 2^{ème} loi de Fick (diffusion + convection)*
- e) Équation de bilan de masse généralisée pour un mélange sans réactions chimiques*

II.2 Problème typique de diffusion de matière

- a) Diffusion équimolaire ou milieu immobile ($N_A + N_B = 0$)*
- b) Diffusion de A dans B stagnant (inerte) ($N_B = 0$)*

II. Transfert de masse

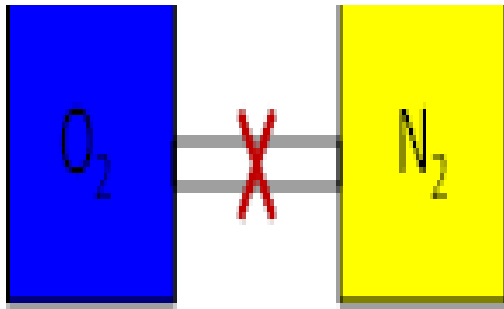
Introduction

- ✓ Le transfert de matière (ou transfert de masse) joue un rôle très important dans les opérations unitaires de base mises en œuvre au cours de la **transformation des aliments ou de produits biologiques** (séchage, salage, sucrage, absorption, adsorption, cristallisation, extraction, distillation, ...).
- ✓ Au cours de ces opérations, le transfert de matière est classiquement **le facteur limitant la vitesse du procédé**, même si le transfert de chaleur et le flux du produit peuvent aussi être en cause.
- ✓ Le transfert de matière a aussi un rôle très important **lors de l'emballage des produits** et de leur **entreposage** : transfert d'humidité, de gaz, de composés de saveur à travers le matériau d'emballage.
- ✓ Le transfert de matière consiste en la migration de composés à l'intérieur d'une phase ou entre des phases. Cette migration résulte d'un changement dans l'équilibre d'un système causé par une/des différences de potentiel(s) : différence de concentration d'une espèce d'un point à un autre, différence de température et/ou différence de pression.

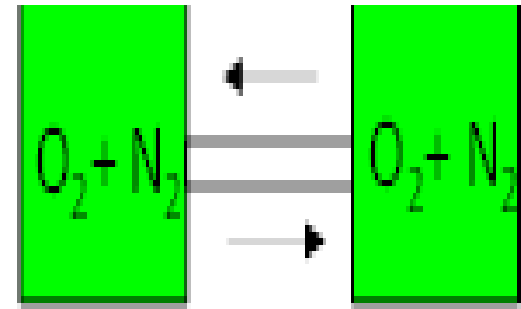
II. Transfert de masse

Introduction

- ✓ Toute différence de potentiel entraîne une évolution spontanée vers l'uniformité : une différence de concentration d'un composé entre deux points d'un système entraîne donc un transfert de matière jusqu'à atteindre l'uniformité de concentration.



$t=0$

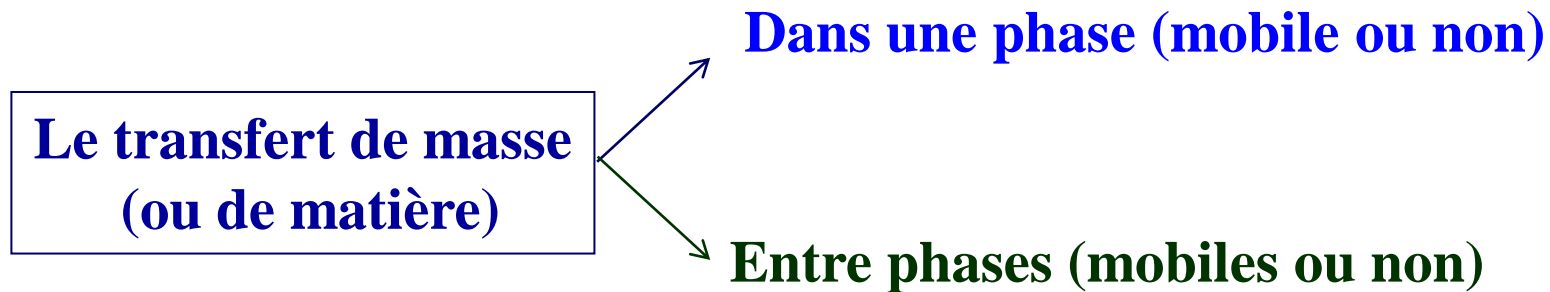


$t \rightarrow \infty$

II. Transfert de masse

Introduction

Lorsqu'on s'intéresse au transfert de matière, on doit distinguer deux cas, selon que le transfert se fait au sein d'une phase ou entre deux phases partiellement ou totalement immiscibles. En outre, chacune des phases peut être mobile ou immobile



- a) **Phase immobile** : Une phase immobile ne signifie pas qu'il n'y a pas de mouvement d'ensemble des molécules, mais au niveau de la phase, le transport se fait uniquement par **diffusion moléculaire**, et il n'existe pas dans la phase de tourbillons provoquant - avec une dégradation d'énergie mécanique et de quantité de mouvement - le brassage d'agrégats de fluide ayant des compositions différentes.

II. Transfert de masse

Diffusion

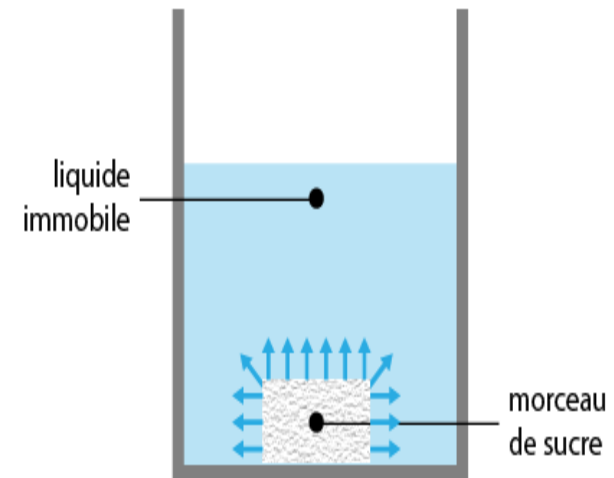
La diffusion est un processus lent : les molécules migrent dans un solide ou dans un fluide considéré comme **immobile** (écoulement laminaire).

Exemple : diffusion des molécules de sucre, dispersion par agitation moléculaire suivant des trajectoires aléatoires entre les molécules d'eau.

✓ un morceau de sucre dans un tasse de café.
Celui-ci commence à fondre et se répand dans la tasse par diffusion

Les molécules de sucre plongées dans du café essayent de se frayer un chemin à travers les molécules de liquide.

La diffusion résulte d'une différence de concentration : quand le sucre fond, la concentration en sucre, qui était maximum au fond de la tasse et nulle à la surface, va changer plus ou moins rapidement, et tout le café sera finalement sucré.



II. Transfert de masse

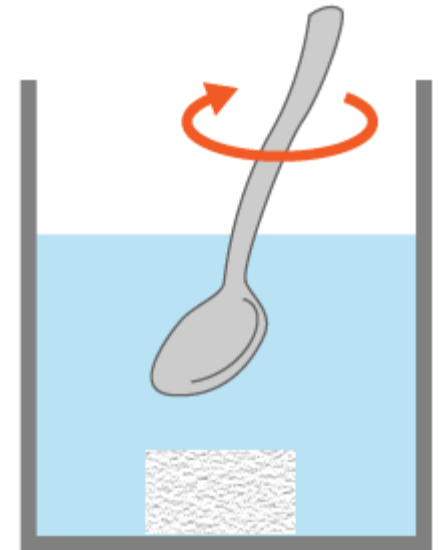
Phase mobile : Par opposition, dans le cas d'une phase mobile, le transport par diffusion des constituants n'est pas dû uniquement à la **diffusion moléculaire** mais aussi à la **diffusion turbulente (Convection)**.

—> **Diffusion moléculaire**

—> **Diffusion turbulente : tourbillons provoquant le brassage d'agrégats de fluides de différentes compositions.**

Convection : La convection est un processus rapide : les molécules sont entraînées dans un courant de fluide naturel ou forcé (convection naturelle ou forcée).

Exemple : l'agitation avec une cuillère est une convection forcée. .



II. Transfert de masse

II.1 Équations de bilan pour un mélange

a) Définitions des Quantité de matière , concentrations et des densités de flux de masse

Nous considérerons ici un mélange de gaz ou une solution (constituée d'un solvant et de un (constituant qu'on notera A) ou de plusieurs constituants) ou encore une suspension de particules. La concentration des divers constituants peut s'exprimer de différentes manières.

Massique

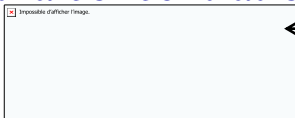
Masse du constituant A : m_A (kg)
Concentration massique : ρ_A (kg/m³)

① Concentration



(II.1)

Soit la concentration totale :



(II.2)

Masse de mélange

Molaire

Qté de matière du constituant A : n_A (mol)
Concentration molaire : c_A (mol/m³)

① Concentration



(II.3)

Masse molaire de A

II. Transfert de masse

Massique

② Fraction

$$\varpi_A = \frac{\rho_A}{\rho} = \frac{m_A}{\sum_i m_i} = \frac{m_A}{m} \quad (\text{II.4})$$

③ Vitesse massique moyenne de mélange en axes fixes (vitesse barycentrique massique)

$$\vec{V} = \frac{1}{\rho} \sum_i (\rho_i \vec{V}_i) \quad (\text{II.6})$$

\vec{V}_i : Vitesse de l'espèce i . En effet, tout point de l'espace à l'instant considéré (variable eulérienne) peut être caractérisé par sa concentration locale ainsi que sa vitesse locale absolue, c'est-à-dire par rapport à un repère fixe.

④ Vitesse de diffusion

C'est la vitesse de diffusion de A par rapport à la vitesse de mélange

$$\vec{V}'_A = \vec{V}_A - \vec{V} \quad (\text{II.8.1})$$

Molaire

② Fraction

$$x_A = \frac{n_A}{n} = \frac{c_A}{c} \longrightarrow \sum_i x_i = 1 \quad (\text{II.5})$$

Par convention, x et y désignent respectivement les fractions molaires des phases liquides et gazeuses.

③ Vitesse molaire moyenne de mélange en axes fixes (vitesse barycentrique molaire)

$$\vec{V}^* = \frac{1}{c} \sum_i (c_i \vec{V}_i) \quad (\text{II.7})$$

④ Vitesse de diffusion

$$\vec{V}^{*'}_A = \vec{V}_A - \vec{V}^* \quad (\text{II.8.2})$$

II. Transfert de masse

Massique

Molaire

⑤ *Taux de transfert de matière*

Correspond à la quantité de matière transférée par unité de temps.

$$q_A = \frac{m_A}{t} \quad (\text{kg/s}) \quad (\text{II.9})$$

⑥ *Densité de flux*

$$\vec{n}_A = \rho_A \vec{V}_A \quad (\text{II.11.1})$$

⑦ *Densité de flux massique de diffusion*

$$\vec{J}_A = \rho_A \vec{V}_A' \quad (\text{II.12.1})$$

⑤ *Taux de transfert de matière*

$$q_A^* = \frac{n_A}{t} \quad (\text{mol/s}) \quad (\text{II.10})$$

⑥ *Densité de flux*

$$\vec{N}_A = c_A \vec{V}_A \quad (\text{II.11.2})$$

⑦ *Densité de flux molaire de diffusion*

$$\vec{J}_A^* = c_A \vec{V}_A^{*'} \quad (\text{II.12.2})$$

II. Transfert de masse

Relations entre flux

$$\sum_i \vec{J}_i = \sum_i \vec{J}_i^* = 0 \quad (\text{II.13})$$

$$\vec{N}_A = c_A \vec{V}_A = c_A \left(\vec{V}_A^{*'} + \vec{V}^* \right) \quad (\text{II.15})$$

$$\vec{n}_A = \underbrace{\vec{J}_A}_{(1)} + \underbrace{\varpi_A \sum_i \vec{n}_i}_{(2)} \quad (\text{II.14})$$

$$\vec{N}_A = \underbrace{\vec{J}_A^*}_{(1)} + \underbrace{x_A \sum_i \vec{N}_i}_{(2)} \quad (\text{II.16})$$

(1) : Densité de flux de diffusion. (2) : Densité de flux de convection ou de transport.

II. Transfert de masse

Intro. 01 :

1. Pour un mélange binaire de A et B, montrer que la fraction massique ω_A est reliée à la fraction molaire x_A (et inversement) par :

$$\omega_A = \frac{x_A M_A}{x_A M_A + x_B M_B}$$

Et

$$x_A = \frac{\frac{\omega_A}{M_A}}{\left(\frac{\omega_A}{M_A} + \frac{\omega_B}{M_B} \right)}$$

1. La composition de l'air atmosphérique en pourcentage massique est de 79,04 % d'azote (N₂), de 20,93 % d'oxygéné (O₂) et de 0,03 % de dioxyde de carbone (CO₂).

Déterminer les fractions molaires et les pressions partielles.

II. Transfert de masse

Corrigé Intro. 01 :

1. Pour un mélange binaire de A et B, montrer que la fraction massique ω_A est reliée à la fraction molaire x_A (et inversement) par :

$$\omega_A = \frac{x_A M_A}{x_A M_A + x_B M_B}$$

Et

$$x_A = \frac{\frac{\omega_A}{M_A}}{\left(\frac{\omega_A}{M_A} + \frac{\omega_B}{M_B} \right)}$$

$$\omega_A = \frac{m_A}{\sum m_i} = \frac{m_A}{m_A + m_B}$$

avec

$$m_i = n_i M_i$$

$$n_t = n_A + n_B$$

En remplaçant

$$\omega_A = \frac{n_A M_A}{n_A M_A + n_B M_B} * \frac{n_t}{n_t}$$



$$\omega_A = \frac{x_A M_A}{x_A M_A + x_B M_B} (*)$$

II. Transfert de masse

Corrigé Intro. 01 :

$$x_A = \frac{n_A}{\sum n_i} = \frac{n_A}{n_A + n_B}$$

avec

$$n_i = m_i / M_i$$

$$m_t = m_A + m_B$$

En remplaçant

$$x_A = \frac{m_A / M_A}{m_A / M_A + m_B / M_B} * \boxed{\frac{m_t}{m_t}}$$

$$\longrightarrow \boxed{x_A = \frac{\omega_A / M_A}{\omega_A / M_A + \omega_B / M_B}} \quad (**)$$

II. Transfert de masse

Corrigé Intro. 01 :

1. La composition de l'air atmosphérique en pourcentage massique est de 79,04 % d'azote (N₂) (A), de 20,93 % d'oxygène (O₂) (B) et de 0,03 % de dioxyde de carbone (CO₂) (C).

Déterminer les fractions molaires et les pressions partielles.

En remplaçant dans l'équation (**)

$$X_i = \frac{\omega_i / M_i}{\sum_i \omega_i / M_i}$$

$$X_A = \frac{\omega_A / M_A}{\omega_A / M_A + \omega_B / M_B + \omega_C / M_C}$$

$$X_A = \frac{0,7904 / 28}{0,7904 / 28 + 0,2093 / 32 + 0,0003 / 44} = 0,811 = 81,10\%$$

$$X_B = \frac{0,2093 / 32}{0,7904 / 28 + 0,2093 / 32 + 0,0003 / 44} = 0,1881 = 18,81\%$$

$$X_C = \frac{0,0003 / 44}{0,7904 / 28 + 0,2093 / 32 + 0,0003 / 44} = 0,0001 = 0,01\%$$

II. Transfert de masse

Intro. 02 :

L'analyse d'un gaz naturel a donné les résultats suivants (en mole) : 4% de dioxyde de carbone (CO_2), 14 % d'azote (N_2) ,), 5 % d'éthane (C_2H_6) et 77% de méthane (CH_4).

Déterminer la fraction massique d'azote, et la masse molaire moyenne du mélange.

Intro. 03 :

Soit un mélange binaire composé de A et B en mouvement tel que :

$$x_A = 1/6 ; V^* = 12 \text{ cm/s} ; V_A - V^* = 3 \text{ cm/s} ; M_A = 5M_B$$

Calculer,

$$V_B ; V_B - V^* ; V ; V_A - V ; V_B - V$$

II. Transfert de masse

Corrigé Intro. 02 :

L'analyse d'un gaz naturel a donné les résultats suivants (en mole) : 4% de dioxyde de carbone (CO_2) (A), 14 % d'azote (N_2) , (B), 5 % d'éthane (C_2H_6) (C) et 77% de méthane (CH_4) (D).

Déterminer la fraction massique d'azote, et la masse molaire moyenne du mélange.

D'après l'INTO 01, en remplaçant dans l'équation (*)

$$\omega_i = \frac{x_i M_i}{\sum_i x_i M_i} \quad ; \quad \omega_A = \frac{x_A M_A}{x_A M_A + x_B M_B + x_C M_C + x_D M_D}$$

$$X_A = \frac{0,04 / 44}{0,04 / 44 + 0,14 / 28 + 0,05 / 30 + 0,77 / 16} = 0,016 = 1,6\%$$

$$X_B = \frac{0,14 / 28}{0,04 / 44 + 0,14 / 28 + 0,05 / 30 + 0,77 / 16} = 0,0897 = 8,97\%$$

$$X_C = \frac{0,05 / 30}{0,04 / 44 + 0,14 / 28 + 0,05 / 30 + 0,77 / 16} = 0,0299 = 2,99\%$$

$$X_D = \frac{0,77 / 16}{0,04 / 44 + 0,14 / 28 + 0,05 / 30 + 0,77 / 16} = 0,8644 = 86,44\%$$

II. Transfert de masse

Corrigé Intro. 03 :

Soit un mélange binaire composé de A et B en mouvement tel que :

$$x_A = 1/6 ; V^* = 12 \text{ cm/s} ; V_A - V^* = 3 \text{ cm/s} ; M_A = 5M_B$$

Calculer, V_B ; $V_B - V^*$; V ; $V_A - V$; $V_B - V$

➤ Vitesse absolu de B, V_B

*Vitesse molaire moyenne de mélange en axes fixes (vitesse barycentrique molaire) V^**

$$V^* = \frac{1}{C} \sum_i (c_i V_i) \longrightarrow V^* = \sum_i \frac{(c_i V_i)}{C} = \frac{c_A V_A + c_B V_B}{C}$$

$$V^* = x_A V_A + x_B V_B \longrightarrow V_B = \frac{(V^* - x_A V_A)}{x_B}$$

$$V_B = \frac{(12 - (1/6) * 15)}{1 - (1/6)} = 11,4 \text{ cm / s}$$

II. Transfert de masse

Corrigé Intro. 03 :

Soit un mélange binaire composé de A et B en mouvement tel que :

$$x_A = 1/6 ; V^* = 12 \text{ cm/s} ; V_A - V^* = 3 \text{ cm/s} ; M_A = 5M_B$$

Calculer, V_B ; $V_B - V^*$; V ; $V_A - V$; $V_B - V$

➤ Vitesse molaire de diffusion de B: $V_B^{*'} = V_B - V^*$

$$V_B^{*'} = V_B - V^* = 11,4 - 12 = -0,6 \text{ cm / s}$$

➤ Vitesse massique moyenne de mélange V :

$$V = \frac{1}{\rho} \sum_i (\rho_i V_i) = \sum_i \frac{(\rho_i V_i)}{\rho} = \sum_i \omega_i V_i = \omega_A V_A + \omega_B V_B$$

$$\omega_i = \frac{x_i M_i}{\sum_i x_i M_i}$$

$$V = \frac{x_A M_A V_A + x_B M_B V_B}{x_A M_A + x_B M_B}$$

Corrigé Intro. 03 :

Soit un mélange binaire composé de A et B en mouvement tel que :

$$x_A = 1/6 ; V^* = 12 \text{ cm/s} ; V_A - V^* = 3 \text{ cm/s} ; M_A = 5M_B$$

Calculer, V_B ; $V_B - V^*$; V ; $V_A - V$; $V_B - V$

➤ Vitesse massique moyenne de mélange V :

$$V = \frac{x_A M_A V_A + x_B M_B V_B}{x_A M_A + x_B M_B}$$

$$V = \frac{5 x_A M_B V_A + x_B M_B V_B}{5 x_A M_B + x_B M_B}$$

$$V = \frac{5(1/6) V_A + (5/6) V_B}{5(1/6) + (5/6)} = \frac{V_A + V_B}{1+1} = \frac{15 + 11,4}{2} = 13,2 \text{ cm/s}$$

➤ Vitesse massique de diffusion de A: $V_A' = V_A - V$

$$V_A' = V_A - V = 15 - 13,2 = 1,8 \text{ cm/s}$$

➤ Vitesse massique de diffusion de B: $V_B' = V_B - V$

$$V_B' = V_B - V = 11,4 - 13,2 = -1,8 \text{ cm/s}$$

Intro. 04 :

Un mélange gazeux s'écoule dans une conduite; il a la composition molaire suivante :

CO : 5 % ; CO₂ : 7 % ; O₂ : 8 % ; N₂ : 80 %

Si les vitesses individuelles des constituants sont :

$V_{\text{CO}} = 5,5 \text{ m/s}$; $V_{\text{CO}_2} = 3 \text{ m/s}$; $V_{\text{O}_2} = 5 \text{ m/s}$; $V_{\text{N}_2} = 16 \text{ m/s}$

Trouver:

1. les vitesses barycentrique molaire et massique (V^* et V)
2. les vitesses de diffusion molaire et massique de chaque composé
3. la masse volumique du mélange ρ .

Le gaz est à 295 K et sous 1,013.105 Pa.

Corrigé Intro. 04 :

Un mélange gazeux s'écoule dans une conduite; il a la composition molaire suivante :

CO (A) : 5 % ; CO₂ (B) : 7 % ; O₂ (C) : 8 % ; N₂ (D) : 80 %.

Si les vitesses individuelles des constituants sont :

$V_A = 5,5 \text{ m/s}$; $V_B = 3 \text{ m/s}$; $V_C = 5 \text{ m/s}$; $V_D = 16 \text{ m/s}$

Trouver:

1. les vitesses barycentrique molaire et massique (V^* et V)
2. les vitesses de diffusion molaire et massique de chaque composé
3. la masse volumique du mélange ρ .

Le gaz est à 295 K et sous 1,013.105 Pa.

1. les vitesses barycentrique molaire et massique (V^* et V)

$$V^* = \frac{1}{C} \sum_i (c_i V_i)$$

$$V^* = \sum_i \frac{(c_i V_i)}{C} = \sum_i x_i V_i$$

$$V = \frac{1}{\rho} \sum_i (\rho_i V_i) = \sum_i \frac{(\rho_i V_i)}{\rho} = \sum_i \omega_i V_i = \frac{\sum_i x_i M_i V_i}{\sum_i x_i M_i} = \frac{\sum_i x_i M_i V_i}{\bar{M}}$$

$$V^* = x_A V_A + x_B V_B + x_C V_C + x_D V_D$$

$$V^* = \frac{5 * 5,5 + 7 * 3 + 8 * 5 + 80 * 16}{100} = 13,685 \text{ m/s}$$

II. Transfert de masse

Intro. 04 :

Un mélange gazeux s'écoule dans une conduite; il a la composition molaire suivante :

CO (A) : 5 % ; CO₂ (B) : 7 % ; O₂ (C) : 8 % ; N₂ (D) : 80 %.

Si les vitesses individuelles des constituants sont :

$V_A = 5,5 \text{ m/s}$; $V_B = 3 \text{ m/s}$; $V_C = 5 \text{ m/s}$; $V_D = 16 \text{ m/s}$

Trouver:

1. les vitesses barycentrique molaire et massique (V^* et V)
2. les vitesses de diffusion molaire et massique de chaque composé
3. la masse volumique du mélange ρ .

Le gaz est à 295 K et sous 1,013.105 Pa.

1. les vitesses barycentrique molaire et massique (V^* et V)

$$V = \frac{\sum_i x_i M_i V_i}{\overline{M}} = \frac{x_A M_A V_A + x_B M_B V_B + x_C M_C V_C + x_D M_D V_D}{x_A M_A + x_B M_B + x_C M_C + x_D M_D}$$

$$V = \frac{5 * 5,5 * 28 + 7 * 3 * 44 + 8 * 5 * 32 + 80 * 16 * 28}{5 * 28 + 7 * 44 + 8 * 32 + 80 * 28} = 13,18 \text{ m/s}$$

II. Transfert de masse

Intro. 04 :

Un mélange gazeux s'écoule dans une conduite; il a la composition molaire suivante :

CO (A) : 5 % ; CO₂ (B) : 7 % ; O₂ (C) : 8 % ; N₂ (D) : 80 %.

Si les vitesses individuelles des constituants sont :

$V_A = 5,5 \text{ m/s}$; $V_B = 3 \text{ m/s}$; $V_C = 5 \text{ m/s}$; $V_D = 16 \text{ m/s}$

Trouver:

1. les vitesses barycentrique molaire et massique (V^* et V)
2. les vitesses de diffusion molaire et massique de chaque composé
3. la masse volumique du mélange ρ .

Le gaz est à 295 K et sous 1,013.105 Pa.

2. les vitesses de diffusion molaire et massique de chaque composé ($V_i^{*'} \text{ et } V_i'$)

$$V_i^{*'} = V_i - V^* \Rightarrow \begin{cases} V_A^{*'} = V_A - V^* = 5,5 - 13,685 = -8,185 \text{ m/s} \\ V_B^{*'} = V_B - V^* = 3 - 13,685 = -10,685 \text{ m/s} \\ V_C^{*'} = V_C - V^* = 5 - 13,685 = -8,685 \text{ m/s} \\ V_D^{*'} = V_D - V^* = 16 - 13,685 = 2,315 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$V_i' = V_i - V \Rightarrow \begin{cases} V_A' = V_A - V = 5,5 - 13,18 = -7,68 \text{ m/s} \\ V_B' = V_B - V = 3 - 13,18 = -10,18 \text{ m/s} \\ V_C' = V_C - V = 5 - 13,18 = -8,18 \text{ m/s} \\ V_D' = V_D - V = 16 - 13,18 = 2,82 \text{ m/s} \end{cases}$$

II. Transfert de masse

b) Loi de diffusion de Fick pour un mélange

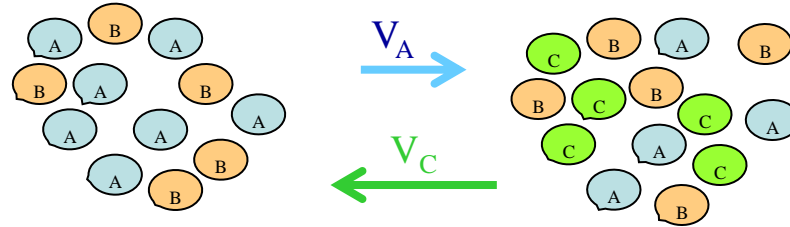


Figure II.1 : Schématisation de la diffusion moléculaire.

La diffusion moléculaire est un mouvement spontané des molécules (atomes ou ions) des régions où leur concentration est élevée vers les zones où celle-ci est plus faible, voire nulle.

Sous l'influence de la différence de concentration (force motrice), le transfert de masse s'effectue jusqu'au moment où les concentrations (des espèces A, B et C) redeviennent homogènes, c'est-à-dire égales dans les deux régions. Le transfert cesse alors.

La 1^{ère} loi de Fick pour le calcul d'un flux diffusif assume que la diffusion de matière résulte uniquement d'un gradient de concentration. En réalité, la diffusion peut aussi résulter d'un gradient de température, de pression ou d'une force externe. Cependant, dans la plupart des cas, ces effets sont négligeables et la force motrice dominante est le gradient de concentration.

II. Transfert de masse

b) Loi de diffusion de Fick pour un mélange

L'équation de Fick est alors la loi qui régit la diffusion moléculaire lorsqu'elle est provoquée uniquement par un gradient de concentration.

Formule générale - écriture vectorielle (flux suivant les 3 directions de l'espace) :

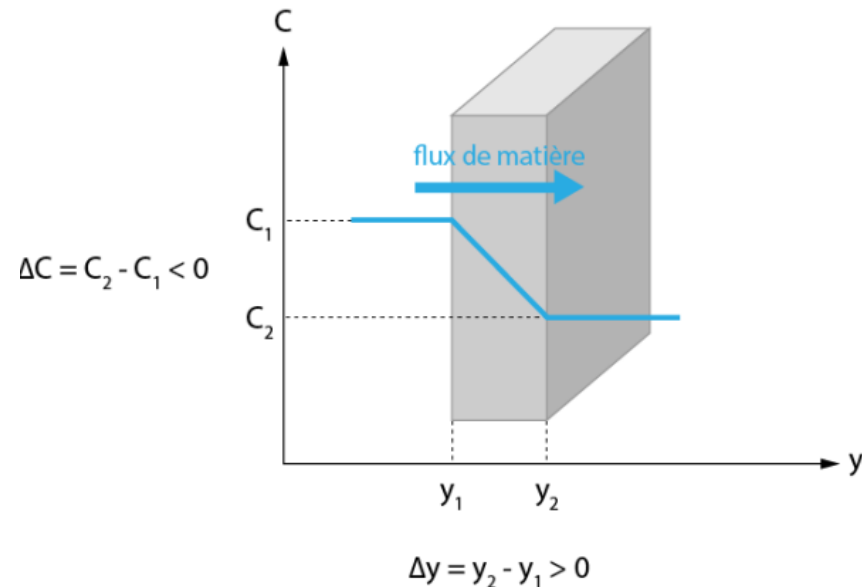
$$\vec{J}_A = \rho_A \vec{V}_A' = -\rho \mathcal{D}_{AM} \overrightarrow{\text{grad}}(\varpi_A) \quad (\text{II.17.1})$$

$$\vec{J}_A^* = c_A \vec{V}_A^{*'} = -c \mathcal{D}_{AM} \overrightarrow{\text{grad}}(x_A) \quad (\text{II.17.2})$$

Si c et ρ sont constantes :

$$\vec{J}_A = -\mathcal{D}_{AM} \overrightarrow{\text{grad}}(\rho_A) \quad (\text{II.18.1})$$

$$\vec{J}_A^* = -\mathcal{D}_{AM} \overrightarrow{\text{grad}}(c_A) \quad (\text{II.18.2})$$



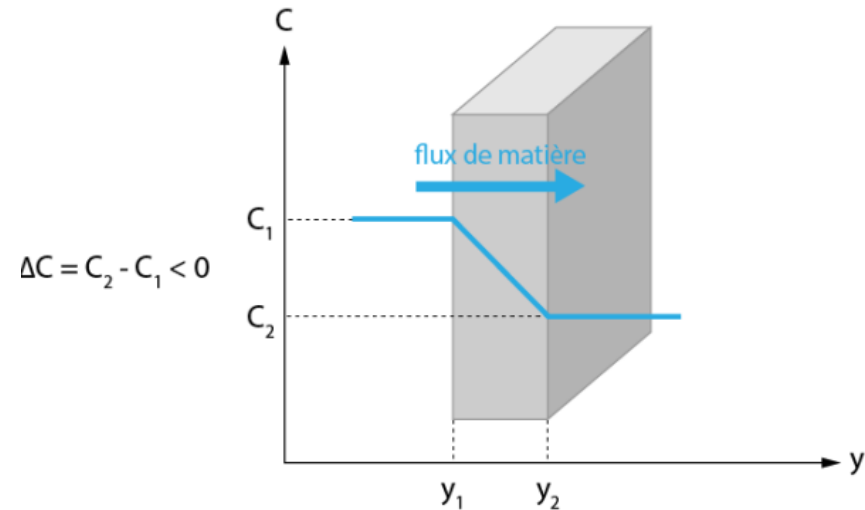
II. Transfert de masse

b) Loi de diffusion de Fick pour un mélange

Formule pour un flux unidirectionnel (ici suivant l'axe y) :

$$J_A = -\mathcal{D}_{AM} \frac{d\rho_A}{dy} = -\mathcal{D}_{AM} \frac{\Delta\rho_A}{\Delta y} \quad (\text{II.19.1})$$

$$J_A^* = -\mathcal{D}_{AM} \frac{dc_A}{dy} = -\mathcal{D}_{AM} \frac{\Delta c_A}{\Delta y} \quad (\text{II.19.2})$$



- J_A ou J_A^* : flux de diffusion du A ($\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ ou $\text{mol.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$)
- \mathcal{D}_{AM} : coefficient de diffusion (ou diffusivité) du A dans le mélange M ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$)
- ρ_A ou c_A : concentration en A (kg.m^{-3} ou mol.m^{-3})
- $\Delta\rho_A$ ou Δc_A : variation de concentration en A (kg.m^{-3} ou mol.m^{-3})
- Δy : distance de transfert ou épaisseur (m)

II. Transfert de masse

c) Coefficient de diffusion \mathcal{D}_{AB}

- ✓ Le coefficient de diffusion est défini pour un composé dans un milieu : \mathcal{D}_{AM} est le coefficient de diffusion du composé A dans le milieu M.
- ✓ Il dépend de la pression et de la température.
- ✓ Les coefficients de diffusion peuvent être trouvés dans la littérature ou calculés à l'aide de corrélations.

Valeurs typiques de \mathcal{D}_{AB}

A et B gaz : 20°C : $\mathcal{D}_{AB} = 1 \text{ à } 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$; (valeurs plus élevées si A ou B = H₂)

A et B liquides : 20°C : $\mathcal{D}_{AB} = 0,2 \text{ à } 2 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$

Gaz dans solide : 20°C : $\mathcal{D}_{AB} = 10^{-12} \text{ à } 10^{-14} \text{ m}^2/\text{s}$ augmente beaucoup avec T

Solide dans solide : 20°C : $\mathcal{D}_{AB} = 10^{-34} \text{ à } 10^{-19} \text{ m}^2/\text{s}$ augmente beaucoup avec T

II. Transfert de masse

d) 2^{ème} loi de Fick (Diffusion + Convection)

La 2^{ème} loi de Fick prend en compte le transport par le mouvement moyen du fluide.

Massique

$$\begin{aligned}\vec{n}_A &= \underbrace{\vec{J}_A}_{(1)} + \underbrace{\vec{T}_A}_{(2)} \\ \vec{n}_A &= \underbrace{\vec{J}_A}_{(1)} + \underbrace{\varpi_A \sum_i \vec{n}_i}_{(2)}\end{aligned}\quad (\text{II.20.1})$$

Molaire

$$\begin{aligned}\vec{N}_A &= \underbrace{\vec{J}_A^*}_{(1)} + \underbrace{\vec{T}_A^*}_{(2)} \\ \vec{N}_A &= \underbrace{\vec{J}_A^*}_{(1)} + \underbrace{x_A \sum_i \vec{N}_i}_{(2)}\end{aligned}\quad (\text{II.20.2})$$

$$J_A^* = -\mathcal{D}_{AM} \frac{\Delta c_A}{\Delta y} = c_A V_A^* \quad (\text{II.20.3})$$

$$T_A^* = c_A V^*$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n_A \text{ ou } N_A : \text{densité de flux global du composé A (kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1} \text{ ou mol.m}^{-2}.\text{s}^{-1}) \\ J_A \text{ ou } J_A^* : \text{densité de flux de diffusion du A (kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1} \text{ ou mol.m}^{-2}.\text{s}^{-1}) \\ J_A \text{ ou } J_A^* : \text{densité de flux par transport convectif du composé A (kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1} \text{ ou mol.m}^{-2}.\text{s}^{-1}) \\ \rho_A \text{ ou } c_A : \text{concentration en A (kg.m}^{-3} \text{ ou mol.m}^{-3}) \end{array} \right.$$

II. Transfert de masse

e) Équation de bilan de masse généralisée pour un mélange avec réactions chimiques

Objectif est, obtenir une équation décrivant l'évolution de la concentration d'un composé dans l'espace et avec le temps (trouver le profile de concentration??).

Pour chaque constituant du mélange, on peut écrire pour l'espèce A du mélange l'équation de conservation de la masse (invariance de la masse).

Méthode : Faire un bilan de matière sur un élément de volume microscopique

$$dv = \Delta x \Delta y \Delta z \quad (\text{II.21})$$

$$[\text{Entrée} - \text{Sortie}]_{\text{par les 3 faces}} \pm \text{Réaction} + \text{Accumulation} = 0$$

II. Transfert de masse

e) Équation de bilan de masse généralisée pour un mélange avec réactions chimiques

$$\text{div}(\mathbf{N}_A) \pm \mathbf{r}_A + \frac{\partial c_A}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.22.1}) \quad \Rightarrow \quad \text{div}(\mathbf{N}_A) = 0 \quad (\text{II.22.2})$$

Pas de réaction
chimique

Transfert moléculaire
stationnaire.

$$\frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial N_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} = 0$$

(II.23) *Équation de bilan générale*

II.2 Problème typique de diffusion de matière

Objectif : Détermination du profil de concentration dans un milieu binaire AB

Forme générale de l'équation (II.23) aux dérivées partielles de bilan (cas molaire), pour un système non réactifs et un Transfert moléculaire stationnaire

$$\frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial N_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} = 0 \quad (II.23)$$

Deux cas extrêmes importants

- a) Diffusion équimolaire ou milieu immobile ($N_A + N_B = 0$)*
- b) Diffusion de A dans B stagnant (inerte) ($N_B = 0$)*

Diffusion stationnaire

Hypothèses :

❶ Transfert moléculaire stationnaire.

$$\text{❶} \quad \frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$$

❷ E^{ct}. unidirectionnel + unidimensionnel.

$$\text{❷} \quad \vec{N}_A = \begin{cases} N_{Ax} \equiv 0 \\ N_{Ay} \equiv 0 \\ N_{Az} = N_{Az}(z) \end{cases}$$

$$\text{❸} \quad \left. \begin{array}{l} p = \text{cte} \\ T = \text{cte} \end{array} \right\} c = \text{cte}$$

❹ $\mathcal{D}_{AB} = \text{Cte.}$

❺ Systèmes non réactifs (Pas de réaction chimique)

II. Transfert de masse

a) *Diffusion équimolaire ou milieu immobile* ($N_A + N_B = 0$)

$$\left. \begin{array}{l} p = \text{cte} \\ T = \text{cte} \end{array} \right\} c = \text{cte} \quad \text{Le nb. tot. de moles se conserve : } n_A + n_B = \text{Cte} \rightarrow \mathbf{N_{Az} = -N_{Bz}}$$

Procédure de Résolution

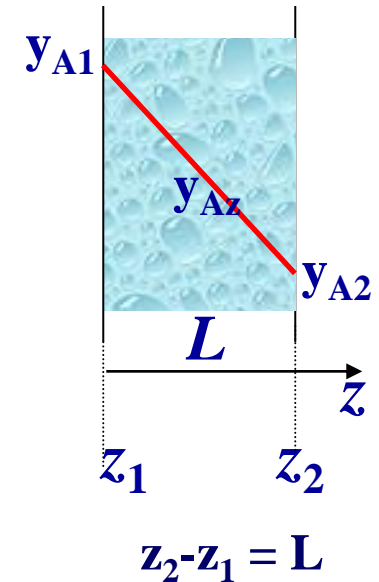
d'après l'équation (II.20)

$$\vec{N}_A = \underbrace{\vec{J}_A^*}_{(1)} + x_A \underbrace{\sum_i \vec{N}_i}_{(2)} = \underbrace{\vec{J}_A^*}_{(1)} + y_A \underbrace{\sum_i \vec{N}_i}_{(2)}$$

$$N_{Az}(z) = \underbrace{-c \mathcal{D}_{AB} \frac{dy_A(z)}{dz}}_{J_A^*} + \underbrace{y_A(z) (N_{Az}(z) - N_{Az}(z))}_{\cancel{T_A^*} \rightarrow 0}$$

$$\underbrace{N_{Az}}_{??} \int_{z_1}^{z_2} dz = -c \mathcal{D}_{AB} \int_{y_{A1}}^{y_{A2}} dy_A$$

$$\cancel{\frac{\partial N_{Ax}}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial N_{Ay}}{\partial y}} + \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} = 0 \Rightarrow \mathbf{N_{Az} = Cte}$$



II. Transfert de masse

$$N_{Az} = J_{Az}^* = \frac{c \mathcal{D}_{AB}}{L} (y_{A1} - y_{A2})$$

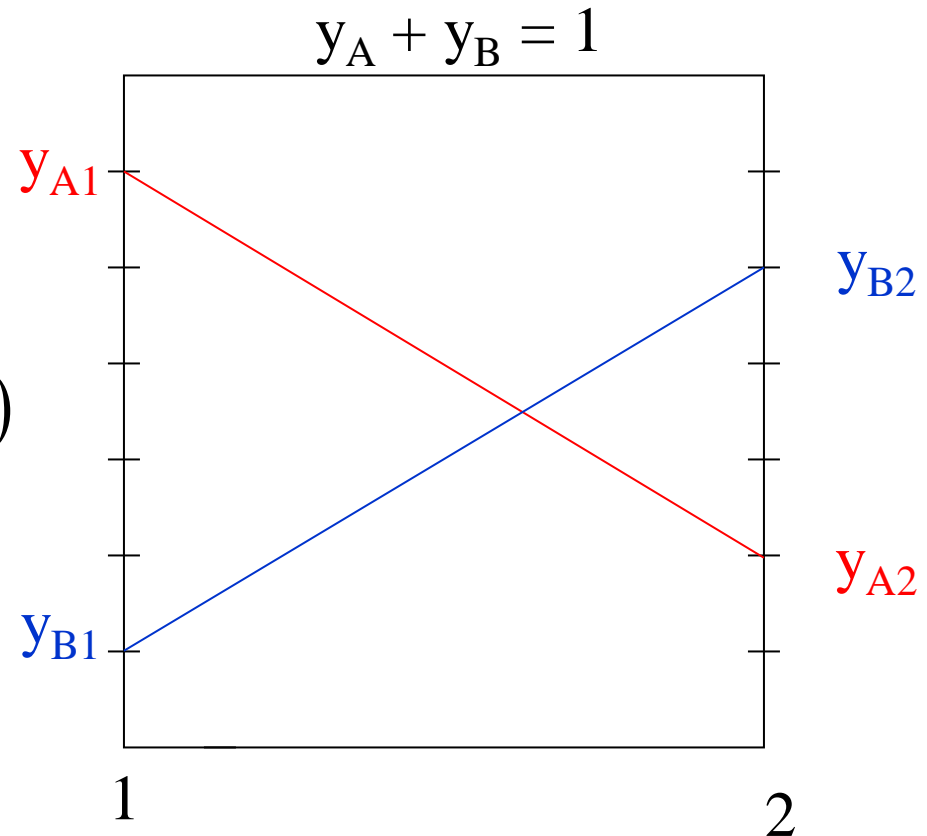
$$C = \frac{P}{RT}$$

$$N_{Az} = J_{Az}^* = \frac{c \mathcal{D}_{AB}}{z} (y_{Az} - y_{A2})$$

Profils de concentration

$$\frac{c \mathcal{D}_{AB}}{L} (y_{A1} - y_{A2}) = \frac{c \mathcal{D}_{AB}}{z} (y_{Az} - y_{A2})$$

$$y_{Az} = \frac{z}{L} (y_{A1} - y_{A2}) + y_{A2}$$



II. Transfert de masse

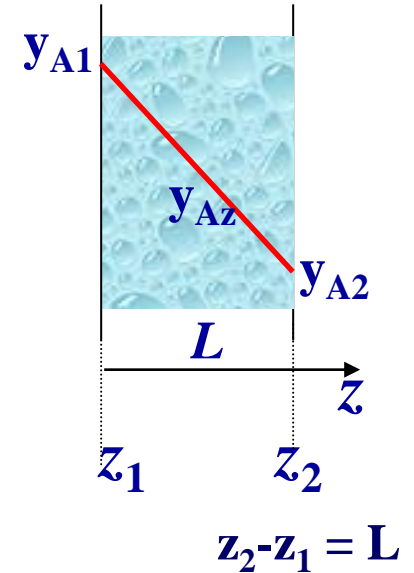
b) Diffusion de A dans B stagnant (inerte) ($N_B = 0$)

$$\left. \begin{array}{l} p = \text{cte} \\ T = \text{cte} \end{array} \right\} c = \text{cte}$$

Procédure de Résolution

d'après l'équation (II.20)

$$\vec{N}_A = \underbrace{\vec{J}_A^*}_{(1)} + \underbrace{x_A \sum_i \vec{N}_i}_{(2)} = \underbrace{\vec{J}_A^*}_{(1)} + \underbrace{y_A \sum_i \vec{N}_i}_{(2)}$$



$$N_{Az}(z) = \underbrace{-c \mathcal{D}_{AB} \frac{dy_A(z)}{dz}}_{J_A^*} + \underbrace{y_A(z) (N_{Az}(z) + N_{Bz}(z))}_{T_A^*}$$

Or, d'après l'équation de bilan, on a:

$$\underbrace{N_{Az}}_{??} \int_{z_1}^{z_2} dz = -c \mathcal{D}_{AB} \int_{y_{A1}}^{y_{A2}} \frac{dy_A}{(1 - y_{A1})}$$

$$\frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial N_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} = 0$$

$$N_{Az} = \text{Cte}$$

II. Transfert de masse

$$N_{Az} = \frac{c \mathcal{D}_{AB}}{L} \ln \left(\frac{1 - y_{A2}}{1 - y_{A1}} \right)$$

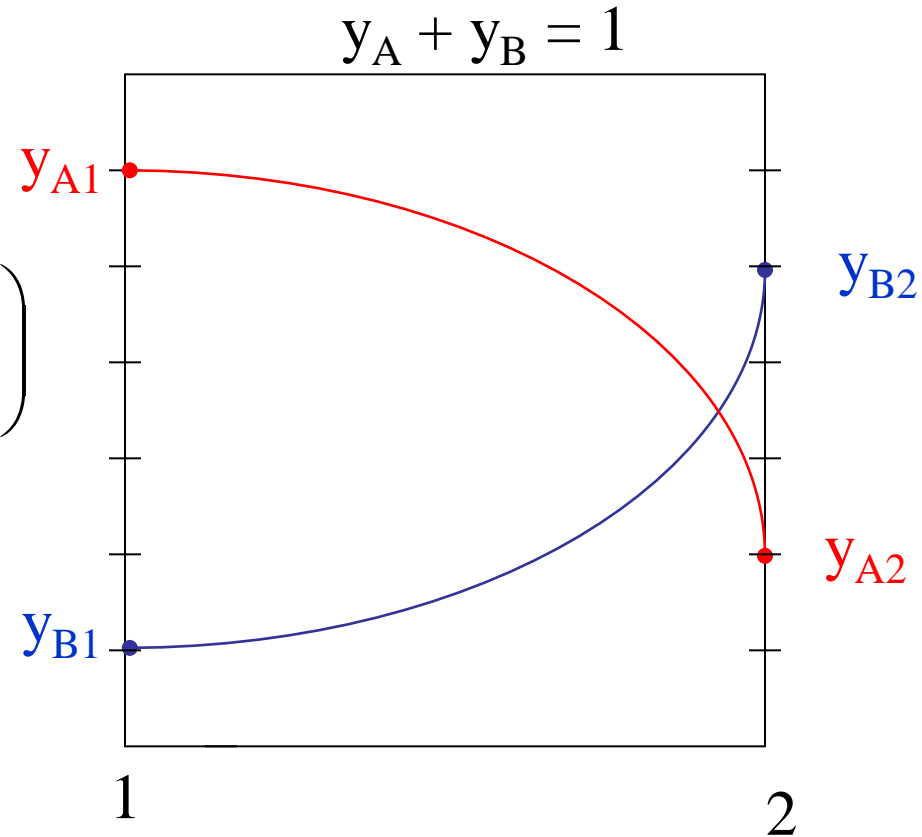
$$C = \frac{P}{RT}$$

Profils de concentration

$$\frac{c \mathcal{D}_{AB}}{L} \ln \left(\frac{1 - y_{A2}}{1 - y_{A1}} \right) = \frac{c \mathcal{D}_{AB}}{z} \ln \left(\frac{1 - y_{A2}}{1 - y_{Az}} \right)$$

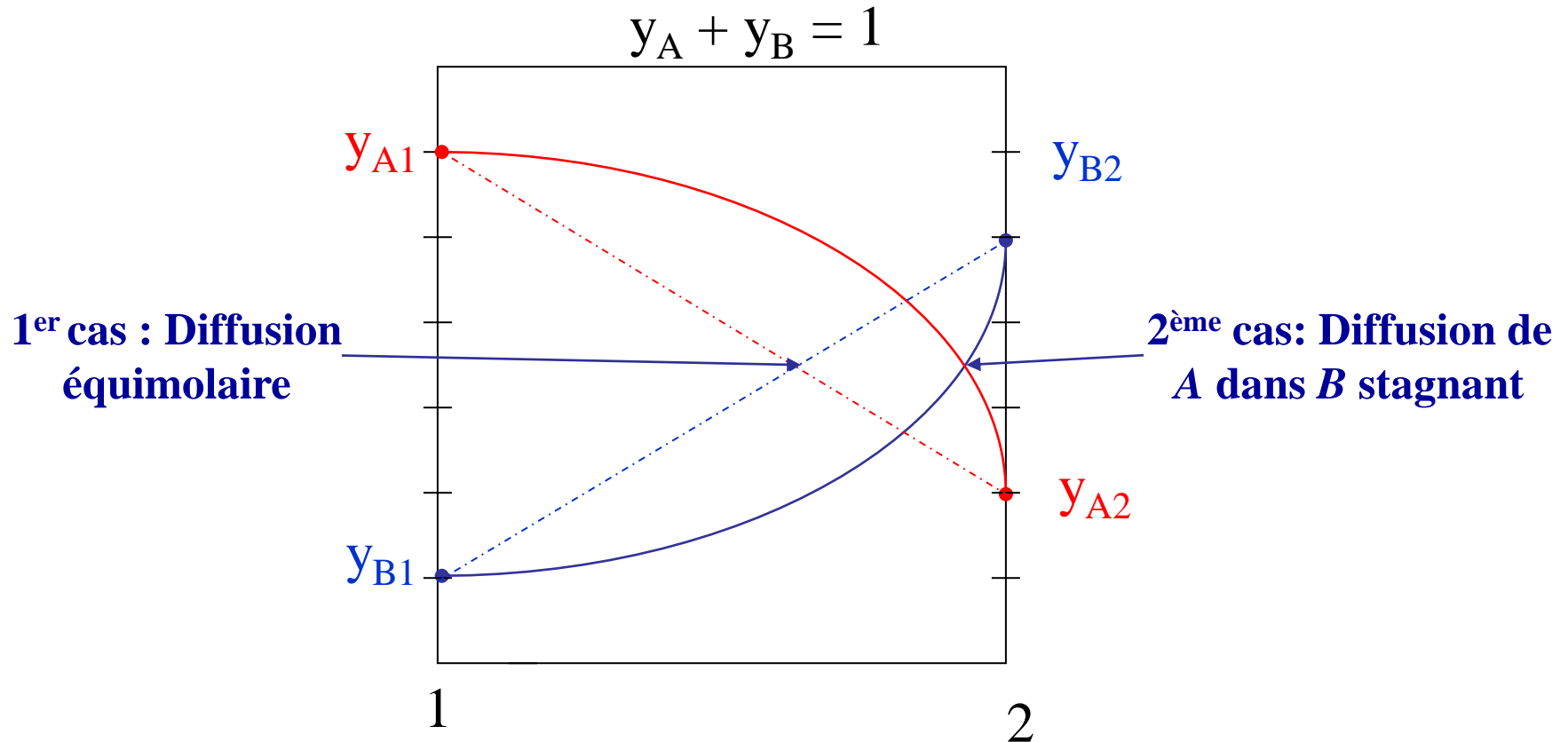
$$y_{Az} = 1 - (1 - y_{A2}) \left(\frac{1 - y_{A2}}{1 - y_{A1}} \right)^{\left(\frac{z}{L} \right)}$$

$$N_{Az} = \frac{c \mathcal{D}_{AB}}{z} \ln \left(\frac{1 - y_{A2}}{1 - y_{Az}} \right)$$



II. Transfert de masse

Comparaison des deux cas extrêmes en géométrie plane à une dimension et conditions aux limites constantes



Le transfert de matière : 1^{er} cas : est plus rapide 2^{ème} cas

II. Transfert de masse

Considérons un transfert de matière unidirectionnelle et unidimensionnelle, s'effectuant en régime stationnaire entre deux plans parallèles distants de 0,50 cm, d'un mélange gaz comportant deux constituants : l'oxygène (A) et l'azote (B). La diffusion a lieu à pression atmosphérique et à une température constante égale à 25°C.

Les concentrations en oxygène sur la surface des deux plans parallèles sont 70% et 30% en volume, respectivement.

On considère que **l'Azote ne diffuse pas à travers les deux plans.**

1. Calculer la densité de flux de transfert de l'oxygène (en mole/cm² s).
2. Déterminer la concentration en oxygène entre les deux plans aux positions suivantes : 0 ; 0,10 ; 0,20 ; 0,30 ; 0,40 ; 0,50 cm.
3. Calculer les densités de flux d'oxygène dues au transport et à la diffusion entre ces plans à ces positions.
4. Quelles sont les vitesses absolues locale, moyenne et de diffusion de l'oxygène à ces positions ?

Données : Le coefficient de diffusion de l'oxygène dans l'azote est de 0,204 cm²/s.

$$M_{O_2} = 32 \text{ g/mole}$$

$$M_{N_2} = 28 \text{ g/mole}$$

Correction

Hypothèses :

❶ Transfert moléculaire stationnaire.

$$\text{❶} \quad \frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$$

❷ E^{ct}. unidirectionnel + unidimensionnel.

$$\text{❷} \quad \vec{N}_A = \begin{cases} N_{Ax} \equiv 0 \\ N_{Ay} \equiv 0 \\ N_{Az} = N_{Az}(z) \end{cases}$$

$$\text{❸} \quad \left. \begin{array}{l} p = \text{cte} \\ T = \text{cte} \end{array} \right\} c = \text{cte}$$

❹ $\mathcal{D}_{AB} = \text{Cte.}$

❺ Systèmes non réactifs (Pas de réaction chimique)

IV. Transfert de masse

Correction

L'Azote ne diffuse pas à travers les deux plans.

1. Calculer la densité de flux de transfert de l'oxygène N_{Az} (en mole/cm² s).

$$N_{Az} = J_{Az}^* + T_{Az}^* = J_{Az}^* + y_A \sum_i N_{iz}$$

$$N_{Az}(z) = \underbrace{-c \mathcal{D}_{AB} \frac{dy_A(z)}{dz}}_{J_A^*} + \underbrace{y_A(z) (N_{Az}(z) + N_{Bz}(z))}_{T_A^*}$$

Or, d'après l'équation de bilan, on a:

$$\underbrace{N_{Az}}_{??} \int_{z_1}^{z_2} dz = -c \mathcal{D}_{AB} \int_{y_{A1}}^{y_{A2}} \frac{dy_A}{(1 - y_A)}$$

$$N_{Az} = \frac{c \mathcal{D}_{AB}}{L} \ln \frac{(1 - y_{A2})}{(1 - y_{A1})} \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_{Ax}}{\partial x} + \frac{\partial N_{Ay}}{\partial y} + \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} = 0$$

$$N_{Az} = \text{Cte}$$

Correction

L'Azote ne diffuse pas à travers les deux plans.

1. Calculer la densité de flux de transfert de l'oxygène N_{Az} (en mole/cm² s).

$$N_{Az} = \frac{c \mathcal{D}_{AB}}{L} \ln \frac{(1 - y_{A2})}{(1 - y_{A1})} \quad (1)$$

AN

$$C = \frac{P}{R T} = \frac{1}{0,082 \ 298} = 0,041 \text{ mol/l} = 41 \text{ mol/m}^3$$

$$N_{Az} = \frac{410,204 \ 10^{-4}}{0,5 \ 10^{-2}} \ln \frac{(1 - 0,3)}{(1 - 0,7)}$$

$$N_{Az} = 0,141 \text{ mol/m}^2\text{s} = 0,141 \ 10^{-4} \text{ mol/cm}^2\text{s}$$

Correction

L'Azote ne diffuse pas à travers les deux plans.

2. Déterminer la concentration en oxygène entre les deux plans aux positions suivantes : 0 ; 0,10 ; 0,20 ; 0,30 ; 0,40 ; 0,50 cm.

$$\underbrace{N_{Az}}_{??} \int_{z_1}^z dz = -c \mathcal{D}_{AB} \int_{y_{A1}}^{y_A(z)} \frac{dy_A}{(1 - y_A)}$$

$$N_{Az} = \frac{c \mathcal{D}_{AB}}{Z} \ln \frac{(1 - y_A(z))}{(1 - y_{A1})} \quad (2)$$

$$(1) \quad \Rightarrow \begin{cases} y_A(z) = 1 - (1 - y_{A1}) \left(\frac{1 - y_{A2}}{1 - y_{A1}} \right)^{\frac{z}{L}} \\ y_A(z) = 1 - 0,3(2,33)^{2 \cdot z} \end{cases}$$

$$N_{Az} = \frac{c \mathcal{D}_{AB}}{L} \ln \frac{(1 - y_{A2})}{(1 - y_{A1})}$$

Correction

L'Azote ne diffuse pas à travers les deux plans.

2. Déterminer la concentration en oxygène entre les deux plans aux positions suivantes : 0 ; 0,10 ; 0,20 ; 0,30 ; 0,40 ; 0,50 cm.

$$y_A(z) = 1 - 0,3(2,33)^{2 \cdot z}$$

Z (cm)	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
$y_A(z)$	0,700	0,645	0,579	0,502	0,410	0,300

$$N_{Az} = 0,141 \text{ mol} / \text{m}^2 \text{s}$$

Correction

L'Azote ne diffuse pas à travers les deux plans.

3. Calculer les densités de flux d'oxygène dues au transport et à la diffusion entre ces plans à ces positions.

$$N_{Az}(z) = \underbrace{-c \mathcal{D}_{AB} \frac{dy_A(z)}{dz}}_{J_A^*} + \underbrace{y_A(z) (N_{Az}(z) + N_{Bz}(z))}_{T_A^*}$$

$$T_A^* = y_A(z) N_{Az} \quad J_A^* = -c \mathcal{D}_{AB} \frac{dy_A(z)}{dz} = N_{Az} (1 - y_A(z))$$

Z (cm)	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
$y_A(z)$	0,700	0,645	0,579	0,502	0,410	0,300
$T_A^*(z) \text{ (mol/m}^2 \text{ S)}$	0,0987	0,0909	0,0817	0,0708	0,0578	0,0425
$J_A^*(z) \text{ (mol/m}^2 \text{ S)}$	0,042	0,050	0,059	0,070	0,083	0,098

Correction

L'Azote ne diffuse pas à travers les deux plans.

4. Quelles sont les vitesses absolues locale, moyenne et de diffusion de l'oxygène à ces positions ?

a) vitesses absolues V_A

$$N_A = c_A V_A = C y_{A(z)} V_A \Rightarrow V_A = \frac{N_A}{C y_{A(z)}}$$

b) vitesses moyenne V^*

$$\left. \begin{aligned} J_A^* &= c_A V_A^{*'} = c_A (V_A - V^*) \\ J_A^* &= N_A - T_A^* = c_A V_A - T_A^* \end{aligned} \right\} \Rightarrow V^* = \frac{N_A y_{A(z)}}{C y_{A(z)}} = \frac{N_A}{C}$$

c) Vitesses de diffusion $V_A^{*'}$

$$V_A^{*'} = V_A - V^*$$

II. Transfert de masse

Correction

L'Azote ne diffuse pas à travers les deux plans.

4. Quelles sont les vitesses absolues locale, moyenne et de diffusion de l'oxygène à ces positions ?

Z (cm)	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
$y_A(z)$	0,700	0,645	0,579	0,502	0,410	0,300
$T_A^*(z)$ (mol/m ² S)	0,0987	0,0909	0,0817	0,0708	0,0578	0,0425
$J_A^*(z)$ (mol/m ² S)	0,042	0,050	0,059	0,070	0,083	0,098
V_A (m/ S)	0,0049	0,0053	0,0060	0,0069	0,0084	0,0114
V^* (m/ S)	0,00345	0,00345	0,00345	0,00345	0,00345	0,00345
$V_A^{*'} (m/ S)$	0,00148	0,00190	0,00250	0,00342	0,00496	0,00798

II. Transfert de masse

Evaluation

Considérons un transfert de matière unidirectionnelle et unidimensionnelle, s'effectuant en régime stationnaire entre deux plans parallèles distants de 0,50 cm, d'un mélange gaz comportant deux constituants : l'oxygène et l'azote. La diffusion a lieu à pression atmosphérique et à une température constante égale à 25°C.

Les concentrations en oxygène sur la surface des deux plans parallèles sont 70% et 30% en volume, respectivement.

On considère que **Il y'a une contre diffusion équimolaire des deux gaz.**

1. Calculer la densité de flux de transfert de l'oxygène (en mole/cm² s).
2. Déterminer la concentration en oxygène entre les deux plans aux positions suivantes : 0 ; 0,10 ; 0,20 ; 0,30 ; 0,40 ; 0,50 cm.
3. Calculer les densités de flux d'oxygène dues au transport et à la diffusion entre ces plans à ces positions.
4. Quelles sont les vitesses absolues locale, moyenne et de diffusion de l'oxygène à ces positions ?

Données : Le coefficient de diffusion de l'oxygène dans l'azote est de 0,204 cm²/s.

$$M_{O_2} = 32 \text{ g/mole}$$

$$M_{N_2} = 28 \text{ g/mole}$$

Phénomènes de Transfert

III. Transfert thermique

III.1 Généralités sur le transfert thermique

- a) Introduction*
- b) Modes de transmission thermique*
- c) Champ de température*
- d) La conduction thermique : loi de Fourier*
- e) Conservation de l'énergie : Équation de l'énergie ou de la chaleur*
- f) Écoulement stationnaire de chaleur (pas de génération)*
 - i) Pas de résistance au transfert*
 - 1. Mur plan*
 - 2. Mur composite multicouches*
 - 3. Conduite cylindrique creuse*
 - 4. Conduite gainée multicouches*
 - 5. Sphère creuse*
 - ii) Résistance au transfert : La convection*
 - 1. Conductances partielles et globales de transfert par convection*
 - 2. Conduite cylindrique recouverte d'un manchon isolant*
 - 3. Détermination du coefficient thermique de convection*

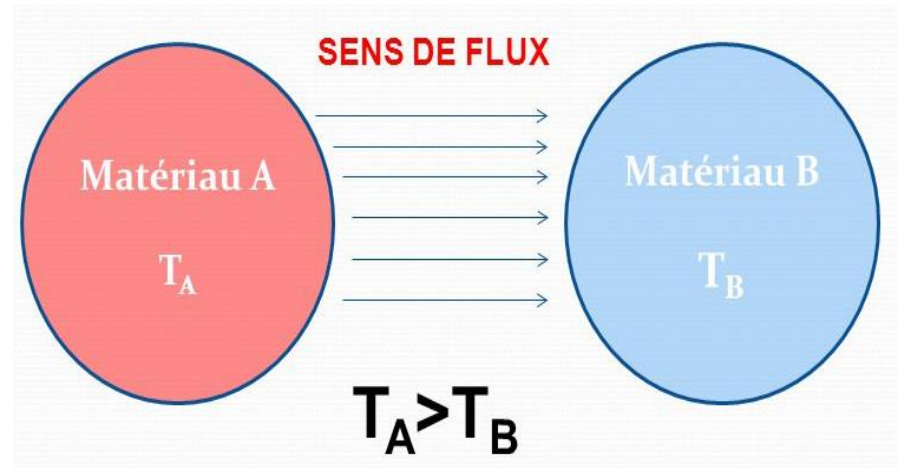
III.2 Echangeur de chaleur

III. Transfert thermique

III.1 Généralités sur le transfert thermique

a) Introduction

Les opérations impliquant des transferts thermiques se rencontrent dans presque toutes les usines (alimentaires, pharmaceutique,..) où les multiples procédés utilisés dans l'industrie sont très souvent le siège d'échanges de chaleur. Des connaissances de base en ce domaine sont donc nécessaires à l'ingénieur de production ou de développement.

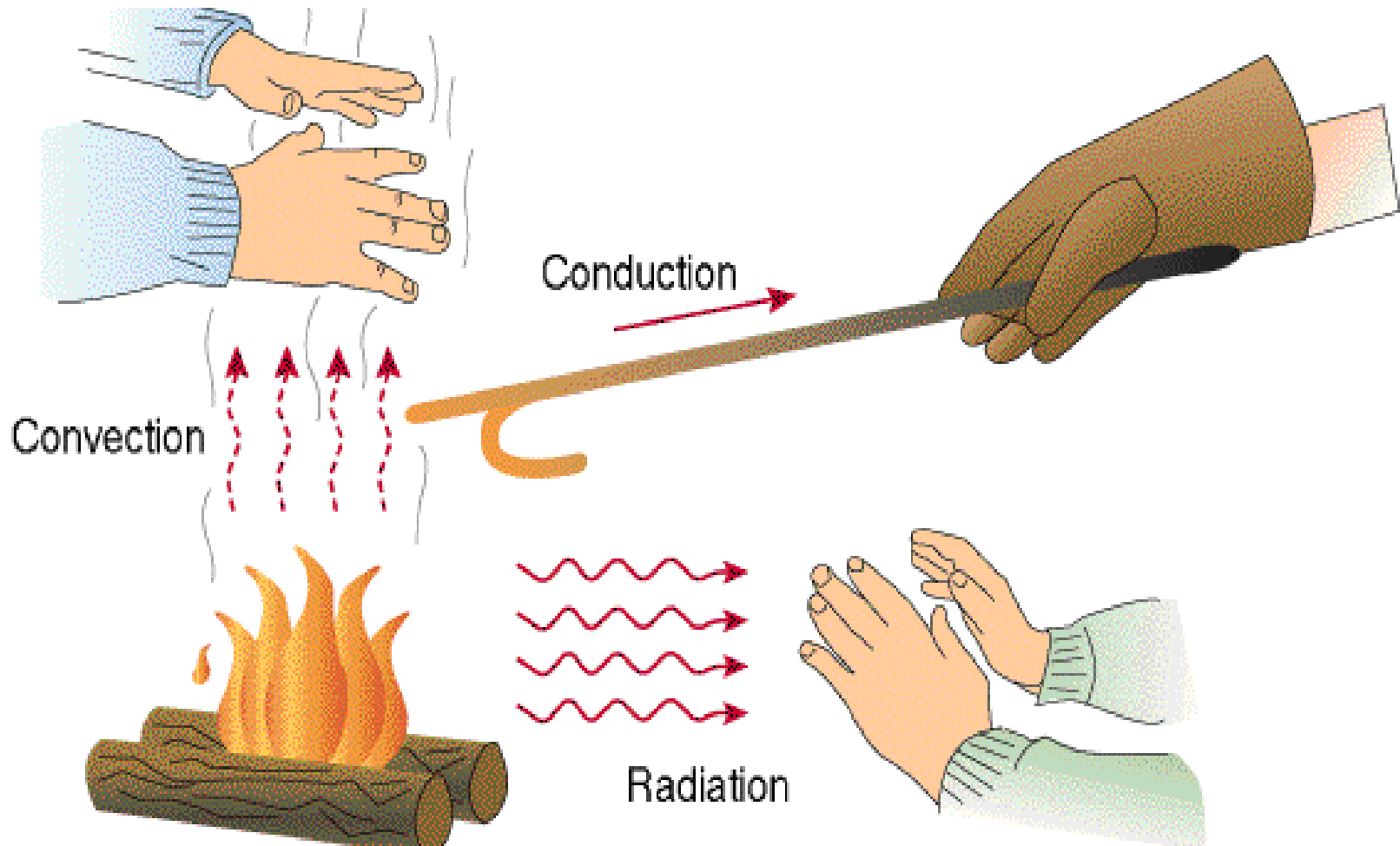


Lorsque deux systèmes sont à des températures différentes, le système le plus chaud cède de la chaleur au plus froid. Il y a échange thermique ou encore transfert thermique entre ces deux systèmes. Cette situation se rencontre dans de nombreuses situations industrielles (moteurs thermiques ou même électriques, centrales électriques au fuel au gaz, etc..., électronique) ou domestique (chauffage de l'habitat).

III. Transfert thermique

b) Modes de transmission de la chaleur

On distingue deux modes de transmission de la chaleur : conduction (conduction pur et convection) et rayonnement

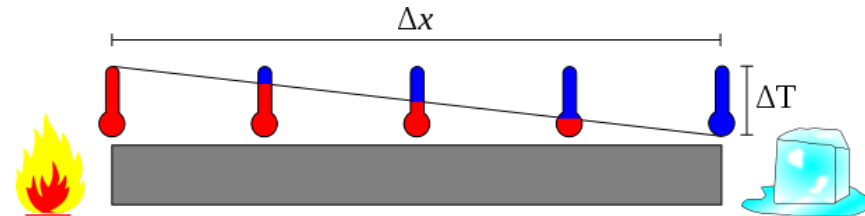


III. Transfert thermique

La conduction (pur) :

C'est le transfert de chaleur au sein d'un milieu opaque, sans déplacement de matière, sous l'influence d'une différence de température. La propagation de la chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts : une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres..

Prenons l'exemple d'une barre métallique que l'on chauffe à l'une de ses extrémités : l'agitation thermique des atomes situés à l'extrémité chauffée de la barre augmente et se transmet de proche en proche dans la direction inverse du gradient thermique.



Dans les métaux, la conduction fait intervenir les électrons libres qui les rendent bons conducteurs de la chaleur. En revanche dans les isolants, la conduction se fait mal. En résumé, il y a une forte correspondance entre les propriétés thermiques et électriques des solides.

III. Transfert thermique

La convection:

C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide.

La convection concerne exclusivement les fluides (gaz ou liquides) puisqu'elle prend sa source dans un transport macroscopique de matière.

La convection a lieu par exemple lorsque l'on chauffe une casserole d'eau. Le gradient thermique vertical est dirigé vers le bas. La masse volumique

La convection a lieu par exemple lorsque l'on chauffe une casserole d'eau. Le gradient thermique vertical est dirigé vers le bas. La masse volumique du fluide inférieur s'abaisse (car celui ci est plus chaud) et le fluide s'élève pour être remplacé par du fluide plus lourd situé plus haut.

La convection tente de s'opposer au gradient thermique par un mouvement de fluide. Ce processus est associé à l'action de la gravité. On note que si l'on chauffe la casserole par le haut, le fluide chaud se situe au dessus du fluide froid et la convection est annihilée (annulé).



III. Transfert thermique

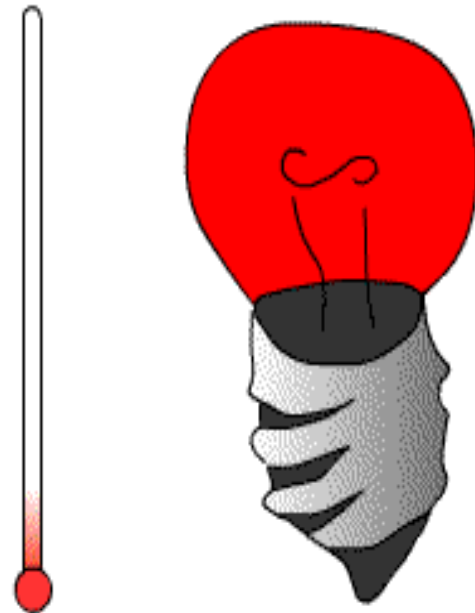
Le rayonnement:

Le rayonnement thermique est de l'énergie émise par la matière à une température finie. Le rayonnement peut provenir d'un solide, d'un liquide ou d'un gaz.

L'énergie du champ radiatif est transportée par les ondes électromagnétiques (ou, ce qui est équivalent, par les photons). Alors que la conduction requiert la présence d'un médium, le rayonnement, lui, est plus efficace dans le vide.

Exemples:

- La chaleur que reçoit la terre à partir du soleil se fait grâce aux rayonnements.
- Les plats sont chauffés dans un four à micro-ondes grâce à la chaleur transportée par des rayonnements micro-ondes.



III. Transfert thermique

c) Champ de températures : un champ scalaire

Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température : $T = f(x, y, z, t)$.

La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température. Nous distinguerons deux cas :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.
- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou transitoire.

d) Transfert de chaleur par conduction thermique : loi de Fourier

Soit un corps solide, homogène et isotrope (les propriétés physiques de ces matériaux sont les mêmes dans toutes les directions de l'espace). à travers lequel passe un courant unidirectionnel de chaleur

III. Transfert thermique

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : le flux de chaleur transféré dans une direction donnée est proportionnel au gradient de température dans cette direction.

Le coefficient de proportionnalité k est la conductivité thermique du matériau. Elle dépend du matériau et de sa température.

La loi de Fourier s'écrit donc :

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

$$\dot{q}_i = -k S \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

q : densité de flux de chaleur ($\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$)

k : conductivité thermique du matériau ($\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$)

$\frac{\partial T}{\partial x_i}$ gradient local de température

\dot{q} flux de chaleur (W)

S : Surface d'échange, m^2

Le signe ($-$) dans l'équation est dû au fait que le flux de chaleur circule dans le sens opposé au gradient de température.

III. Transfert thermique

Plus la conductivité thermique est élevée, plus les matériaux conduisent facilement la chaleur. Au contraire les matériaux de faible conductivité thermique conduisent difficilement la chaleur et sont donc utilisés comme isolants.

Matériaux et Alliages	k (W m ⁻¹ K ⁻¹) à 20 °C
Aluminium à 99,9 %	228
Aluminium à 99 %	203
Cuivre à 99,9 %	386
Etain	61
Fer pur	85
Nickel pur	61
Plomb pur	35
Zinc	111
Acier doux (1 % de C)	46
Acier inox (Cr 18 % - Ni 8 %)	16

SOLIDES NON METALLIQUES et gaz	k (W m ⁻¹ K ⁻¹) à 20 °C
Amiante (feuilles)	0,162
Béton plein	1,7
Briques de terre cuite pleines	1,16
Liège	0,046
Matières plastiques polyester	0,209
Verre pyrex	1,16
Electrographite	116

III. Transfert thermique

GAZ	$k \text{ (W m}^{-1} \text{ K}^{-1})$ à 20 °C
Air	0,024
Acétylène	0,019
Anhydride carbonique	0,014
Oxygène	0,024

LIQUIDES	$k \text{ (W m}^{-1} \text{ K}^{-1})$ à 20 °C
Eau à 20°C	0,59
Eau à 100°C	0,67
Benzène à 30°C	0,14
Mercure à 20°C	0,16

On constate que parmi les solides, les métaux sont beaucoup plus conducteurs que les composés non métalliques à l'exception du graphite (utilisé dans certains échangeurs de chaleur).

L'acier inoxydable est moins conducteur que la plupart des autres métaux et alliages.

On constate en général :

$k \text{ des gaz} < k \text{ des liquides} < k \text{ des solides}$

III. Transfert thermique

e) Conservation de l'énergie : Equation de l'énergie ou de la chaleur

L'équation de l'énergie sera déduite à partir du premier principe de la thermodynamique.

Premier principe de la thermodynamique : le taux de variation de l'énergie totale d'un système est égal à la somme de chaleur reçue et du travail des forces extérieures.

$$\begin{aligned} dE_{\text{tot}} &= \delta q + \delta W_{\text{ext}} \\ d(E_{\text{microscopique}} + E_{\text{macroscopique}}) &= \delta q + \delta W_{\text{ext}} \end{aligned}$$

Objectif :
Détermination du
profil de température??

$$d \int_V \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) dv = \delta q + \delta W_{\text{ext}}$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \left(\rho u + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) dv = \dot{q} + \dot{W}_{\text{ext}}$$

Puissance calorifique

Puissance développée par
les forces extérieures

III. Transfert thermique

$$\frac{d(\rho C_p T)}{dt} + p \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)}_{q_i} + \underbrace{\tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}}_{\phi} + \frac{dp}{dt} + \underbrace{\sum (Q_k m_k)}_{q_g} \quad (I.1)$$

On considérera (dans ce cours) que :

- ❶ Si les propriétés physiques (ρ , C_p et k) sont constantes et uniformes ;
- ❷ Si la fonction de dissipation ϕ est négligeable devant la puissance calorifique échangée ;
- ❸ S'il s'y a pas de réactions chimiques (chaleur de formation des nouveaux corps nulle) et pas de sources de chaleur ;

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t} + V_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \alpha \Delta T \quad (I.2)$$

- ❹ S'il le transfert thermique a lieu dans un **solide** $\rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T$ (Equation de Fourier) (I.3)

- ❺ Si l'écoulement est stationnaire $\rightarrow \nabla^2 T = 0$ (Equation de Laplace) (I.4)

III. Transfert thermique

f) Écoulement *stationnaire* de chaleur

Hypothèses :

- ❶ Pas de génération de chaleur.
- ❷ $k \neq k(p, T)$.
- ❸ $T = T(x)$.

→ Conditions aux limites

→ Ecoulement unidirectionnel de chaleur : $T = T(x)$
et unidirectionnel : $q = q_x$

→ $k = \text{Cte}$.

V. Transfert thermique

f) Écoulement **stationnaire** de chaleur ($k = Cte$)

1. Conduction à travers un mur plan homogène (sans résistance thermique de convection)

$$\Delta T = 0 \longrightarrow \frac{dT}{dx} = Cte$$

Conditions aux limites

Écoulement unidirectionnel de chaleur : $T = T(x)$

Écoulement unidirectionnel de chaleur : $q = q(x)$

$$\dot{q} = \dot{q}_x = -k S \frac{dT}{dx} = Cte$$

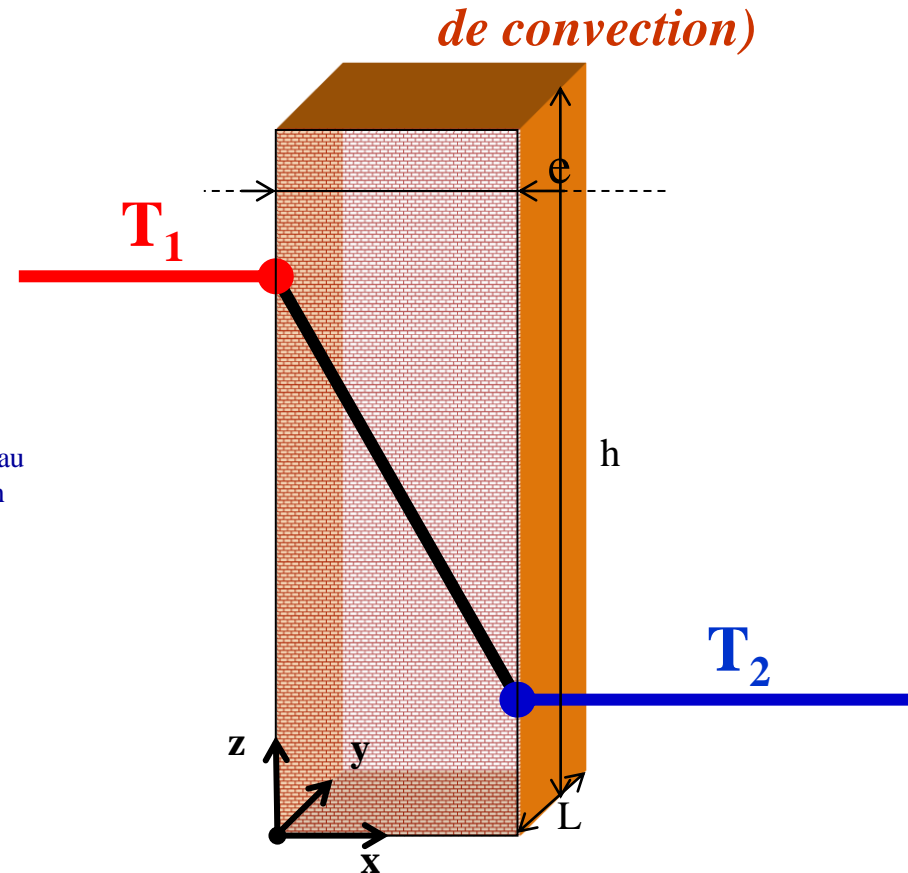
S: Surface orthogonale au flux thermique : $S = L h$

$$\dot{q} \int_{x_1=0}^{x_2=e} dx = -k S \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$\dot{q} \underbrace{(x_2 - x_1)}_e = -k S \underbrace{(T_2 - T_1)}_{-\Delta T}$$

$$\dot{q} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\frac{e}{k_T S} \right]} = \frac{\Delta T}{\mathcal{R}_k} \quad (\text{III.13})$$

$$q = \frac{\dot{q}}{S} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\frac{e}{k_T} \right]} = k_T \frac{\Delta T}{e} \quad (\text{III.14})$$



V. Transfert thermique

f) Écoulement *stationnaire* de chaleur ($k = Cte$)

1. Conduction à travers un mur plan homogène

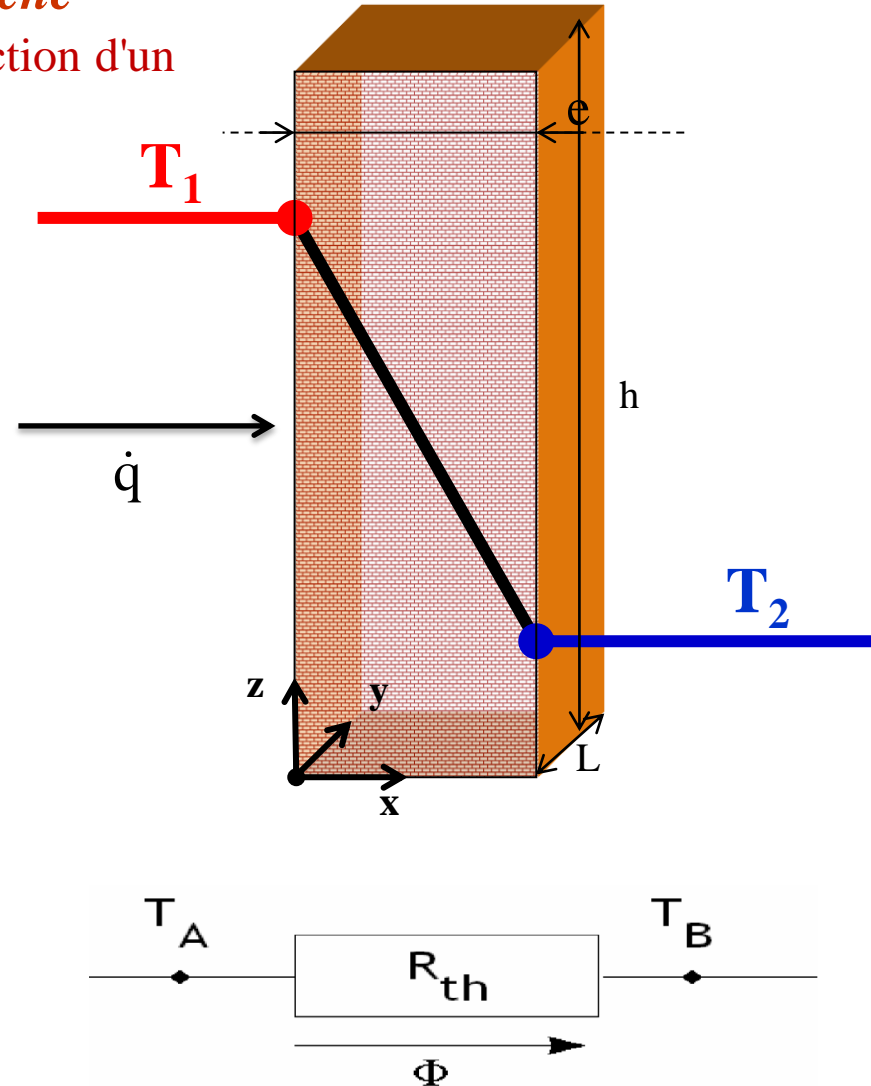
Expression de la résistance thermique de conduction d'un mur plan

Comme en électricité, **la résistance** est le rapport d'une différence de potentiel donc ici de température et d'un débit d'énergie (flux thermique), donc ici **le flux \dot{q}** , d'où l'expression suivante de **la résistance thermique**

Par analogie thermique et électrique

$$\mathcal{R}_{\text{Elec}} = \frac{\Delta U}{I} \quad (\text{III.14.1})$$

$$\mathcal{R}_T = \frac{\Delta T}{\dot{q}} = \frac{e}{k_T S} \quad (\text{III.14.2})$$



V. Transfert thermique

f) Écoulement *stationnaire* de chaleur ($k = \text{Cte}$)

1. Conduction à travers un mur plan homogène

Profil de température $T(x)=??$

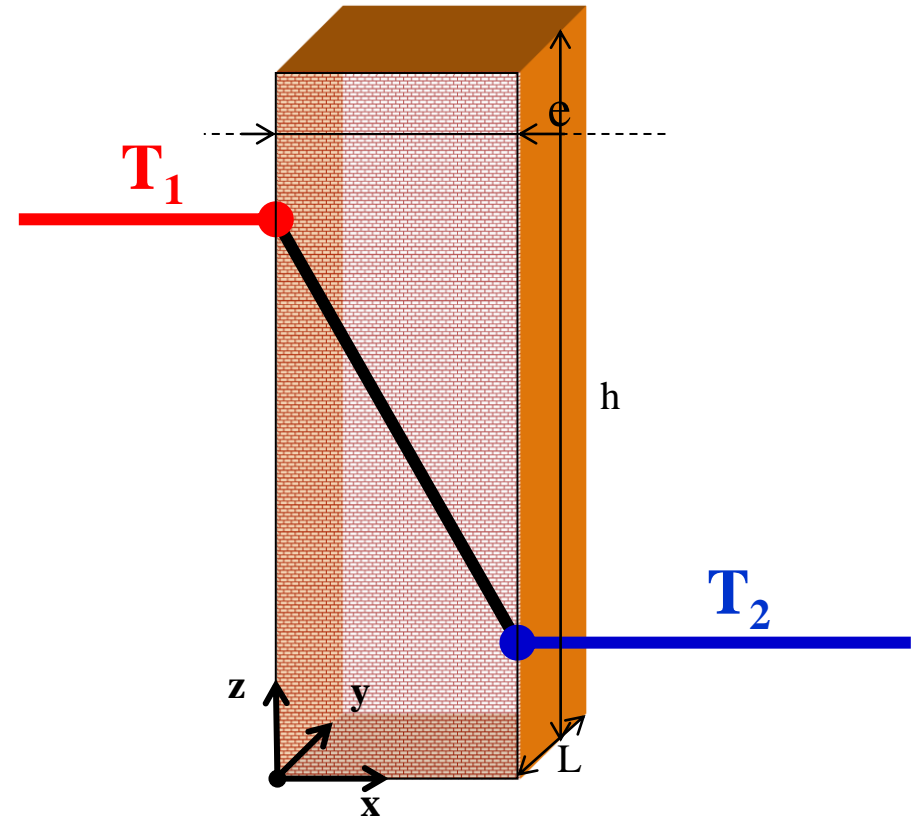
$$\dot{q} \int_{x_1=0}^{x_2=x} dx = -k_T S \int_{T_1}^{T(x)} dT$$
$$\dot{q} \underbrace{(x - x_1)}_x = -k_T S (T(x) - T_1)$$

Écoulement unidirectionnel de chaleur : $T = T(x)$

Écoulement unidirectionnel de chaleur : $q = q(x) = \text{cts}$

$$\dot{q} = \frac{(T_1 - T(x))}{\left[\frac{x - x_1}{k_T S} \right]} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\frac{e}{k_T S} \right]}$$

$$T(x) = T_1 - \frac{(x - x_1)}{e} (T_1 - T_2) \quad (\text{III.15})$$



V. Transfert thermique

Exemple d'application 1 :

- Calculer le flux traversant une vitre de 1 m^2 de surface et d'épaisseur e_v
La température de la face interne de la vitre est T_1 et celle de la face externe est T_2 .
- En déduire la résistance thermique de la vitre.
la Conductivité thermique du verre k_v
- Pour les mêmes températures de paroi, calculer le flux traversant un m^2 de mur de briques d'épaisseur e_b . En déduire la résistance thermique.

La Conductivité thermique des briques k_b :

Données :

$$T_1 = 10 \text{ }^\circ\text{C}, T_2 = 5 \text{ }^\circ\text{C} ; k_v = 0,7 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1} ; e_v = 3,5 \text{ mm} ; e_b = 26 \text{ cm} ; \\ k_b = 0,52 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

V. Transfert thermique

Correction exemple d'application 1 :

- Calculer le flux traversant une vitre de 1 m² de surface et d'épaisseur e_v
La température de la face interne de la vitre est T_1 et celle de la face externe est T_2 .

Hypothèses :

- ❶ Pas de génération de chaleur.
- ❷ $k \neq k(p, T)$.
- ❸ $T = T(x)$.

$$\Delta T = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dT}{dx} = \text{Cte}$$

La loi de Fourier

$$\dot{q} = \dot{q}_x = -k S \frac{dT}{dx} = \text{Cte} \quad \longrightarrow \quad \dot{q} \int_{x_1=0}^{x_2=e_v} dx = -k_v S \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$\dot{q} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\frac{e_v}{k_v S} \right]}$$

$$\dot{q} = \frac{(10 - 5)}{\left[\frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{0,7 \text{ W/m}\cdot\text{K}} \right]} = 1000 \text{ W}$$

V. Transfert thermique

Correction exemple d'application 1 :

- En déduire la résistance thermique de la vitre.

$$\dot{q} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\frac{e_v}{k_v S} \right]} = \frac{(T_1 - T_2)}{R} \quad \longrightarrow \quad R_v = \left[\frac{e_v}{k_v S} \right] = \frac{(T_1 - T_2)}{\dot{q}} = \left[\frac{3,510^{-3}}{0,71} \right] = 510^{-3} \text{ °C/W}$$

- Pour les mêmes températures de paroi, calculer le flux traversant un m² de mur de briques d'épaisseur e_b . En déduire la résistance thermique.

$$\dot{q}' = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\frac{e_b}{k_b S} \right]} \quad \longrightarrow \quad \dot{q}' = \frac{(10 - 5)}{\left[\frac{2610^{-2}}{0,521} \right]} = 10 \text{ W}$$

$$R_b = \left[\frac{e_b}{k_b S} \right] = \frac{(T_1 - T_2)}{\dot{q}} = \left[\frac{2610^{-2}}{0,521} \right] = 0,5 \text{ °C/W}$$

Analyse des résultats : Pour une même surface et un même écart de température, le flux perdu par la vitre est 100 fois plus élevé que celui perdu par le mur de briques dont la conductivité est plus faible et dont l'épaisseur est beaucoup plus élevée que celle de la vitre.

V. Transfert thermique

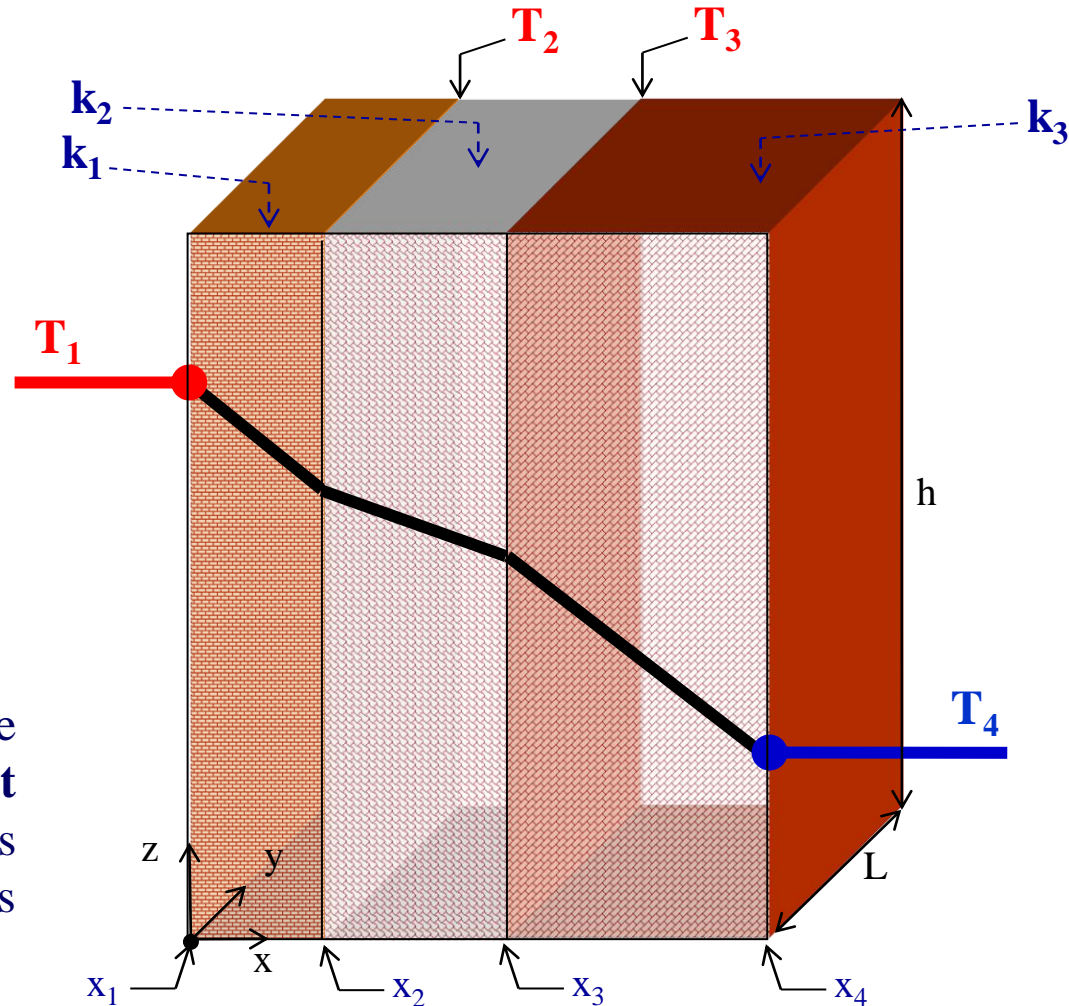
2. Mur composite multicouches (Conduction à travers plusieurs murs plans homogènes, en série)

Considérons **plusieurs murs** limités par des plans parallèles, constitués par des matériaux de conductivités différentes, mais en contact parfait.

Soient k_1 , k_2 , k_3 , les conductivités thermiques moyennes de chaque mur dont les épaisseurs sont respectivement e_1 , e_2 , e_3 .

Chaque mur est donc traversé par le même flux thermique Φ .

On peut écrire d'après la partie précédente (un mur) **le flux traversant chaque mur**, et en déduire les différences de température entre les faces de chaque mur :



V. Transfert thermique

2. Mur composite multicouches (Conduction à travers plusieurs murs plans homogènes, en série)

Pour le mur 1 :

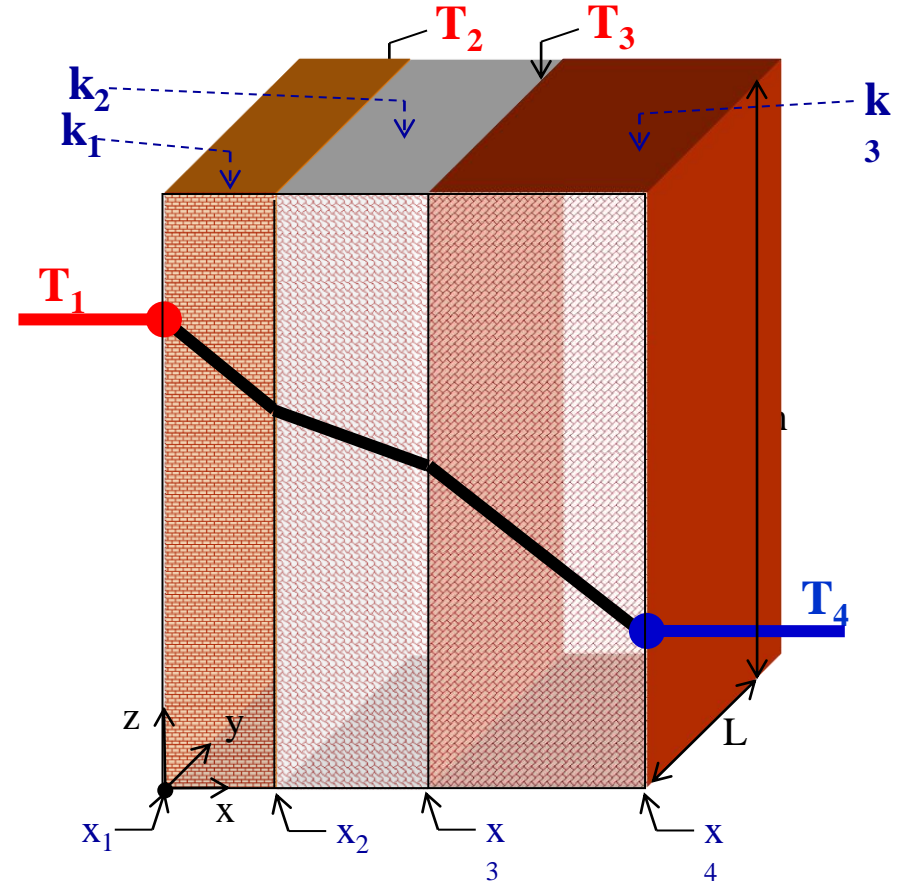
$$(T_1 - T_2) = \dot{q}(e_1/k_1 S)$$

Pour le mur 2 :

$$(T_2 - T_3) = \dot{q}(e_2/k_2 S)$$

Pour le mur 3 :

$$(T_3 - T_4) = \dot{q}(e_3/k_3 S)$$



$$\phi = \dot{q} = \frac{(T_1 - T_4)}{\left[\left(\frac{e_1}{k_1 S} \right) + \left(\frac{e_2}{k_2 S} \right) + \left(\frac{e_3}{k_3 S} \right) \right]} = \frac{\Delta T}{\sum_i (\mathcal{R}_k)_i} \quad (\text{V.15})$$

V. Transfert thermique

2. Mur composite multicouches (Conduction à travers plusieurs murs plans homogènes, en série)

Expression de la résistance thermique équivalente à des murs en série

L'expression précédente du flux peut être en faisant passer S au dénominateur :

$$\dot{q} = \frac{1}{\left[\underbrace{\left(\frac{e_1}{k_1 S} \right)}_{R_1} + \underbrace{\left(\frac{e_2}{k_2 S} \right)}_{R_2} + \underbrace{\left(\frac{e_3}{k_3 S} \right)}_{R_3} \right]} (T_1 - T_4)$$

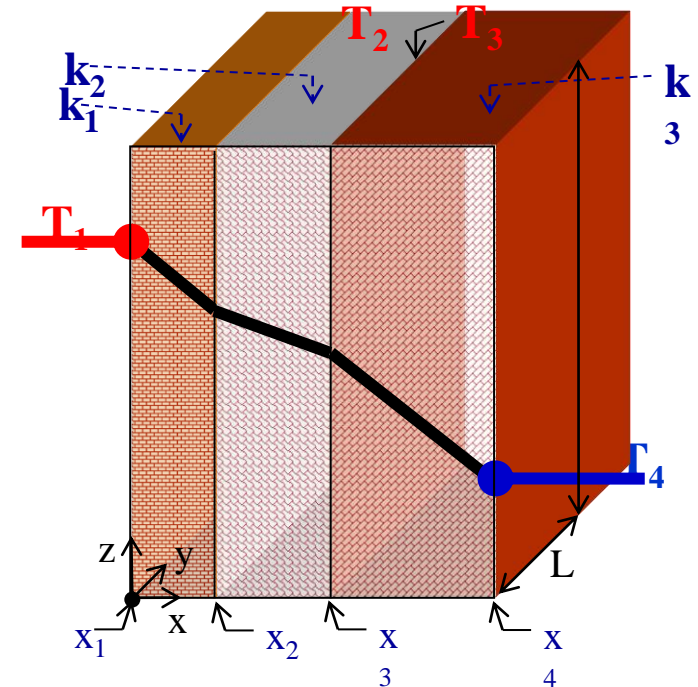
$$\dot{q} = \frac{1}{[R_1 + R_2 + R_3]} (T_1 - T_4)$$

Ces 3 résistances sont placées en série et leur somme constitue la résistance thermique équivalente des 3 murs en série, soit :

$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

$$\dot{q} = \frac{1}{R} (T_1 - T_4)$$

Comme en électricité, la résistance thermique équivalente des murs en série est la somme des résistances thermiques de chaque mur.



Exemple d'application 2 :

Etude des pertes par conduction à travers un double vitrage

Un double vitrage est constitué de deux plaques de verre séparées par une couche d'air sec immobile. L'épaisseur de chaque vitre est de e_v et celle de la couche d'air est de e_a .

La conductivité thermique du verre est k_v et celle de l'air est k_a sur le domaine de température étudié. Pour une chute de température de ΔT entre les deux faces externes du double vitrage.

- calculez les pertes thermiques pour une surface de vitre S . (Note : ce calcul néglige l'effet du coefficient de convection de part et d'autre de chaque vitre).
- Comparez ces pertes thermiques à celles qui seraient obtenues avec une seule vitre d'épaisseur e_v .

Données : $e_v = 3,5 \text{ mm}$; $e_a = 12 \text{ mm}$; $k_v = 0,7 \text{ W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}$; $k_a = 0,024 \text{ W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}$;
 $\Delta T = 5\text{°C}$; $S = 1\text{m}^2$

V. Transfert thermique

Exemple d'application 2 :

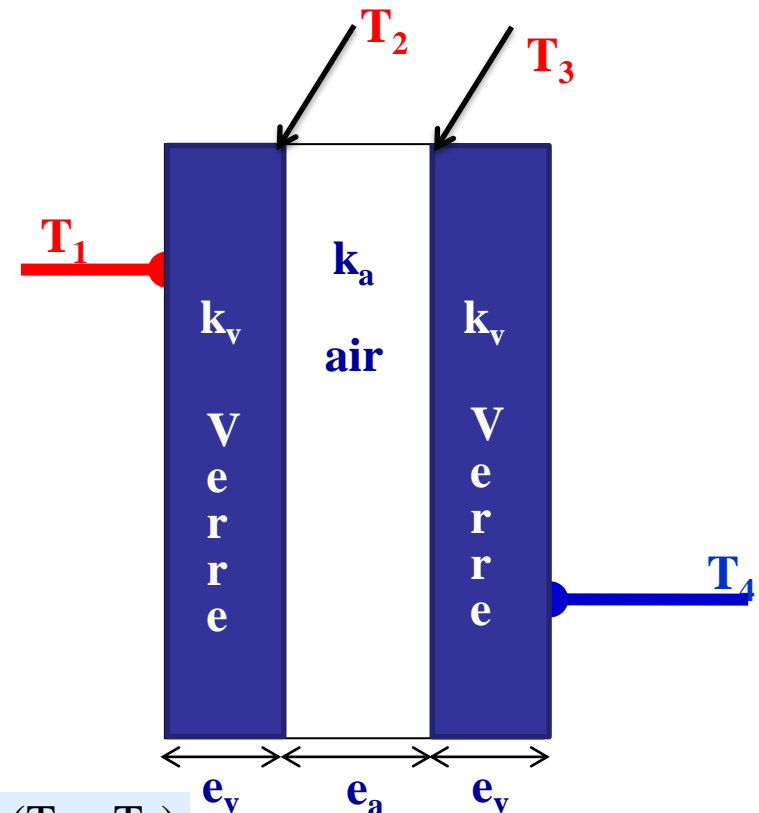
Etude des pertes par conduction à travers un double vitrage

Un double vitrage est constitué de deux plaques de verre séparées par une couche d'air sec immobile. L'épaisseur de chaque vitre est de e_v et celle de la couche d'air est de e_a .

1. calculez les pertes thermiques pour une surface de vitre S .

Hypothèses :

- ❶ Pas de génération de chaleur.
- ❷ $k \neq k(p, T)$.
- ❸ $T = T(x)$.



$$\Delta T = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dT}{dx} = Cte$$

$$\dot{q} = \dot{q}_x = -k S \frac{dT}{dx} = Cte$$

$$\longrightarrow \quad \dot{q} \int_{x_1=0}^{x_2=e_v} dx = -k_v S \int_{T_1}^{T_2} dT \quad \longrightarrow \quad \dot{q} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\frac{e_v}{k_v S} \right]}$$

Exemple d'application 2 :

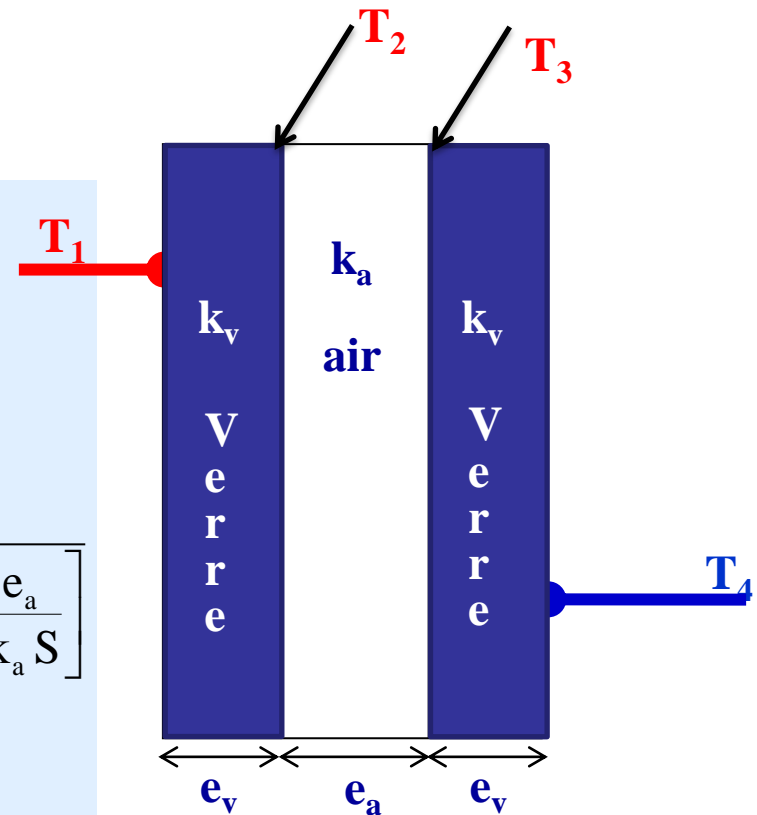
1. calculez les pertes thermiques pour une surface de vitre S.

Hypothèses : ❶ Pas de génération de chaleur.

❷ $k \neq k(p, T)$.

❸ $T = T(x)$.

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\frac{e_v}{k_v S} \right]} \\ \dot{q} &= \frac{(T_2 - T_3)}{\left[\frac{e_a}{k_a S} \right]} \\ \dot{q} &= \frac{(T_3 - T_4)}{\left[\frac{e_v}{k_v S} \right]} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Rightarrow \dot{q} = \frac{(T_1 - T_4)}{\left[\frac{2e_v}{k_v S} \right] + \left[\frac{e_a}{k_a S} \right]} = \frac{\Delta T}{\left[\frac{2e_v}{k_v S} \right] + \left[\frac{e_a}{k_a S} \right]}$$



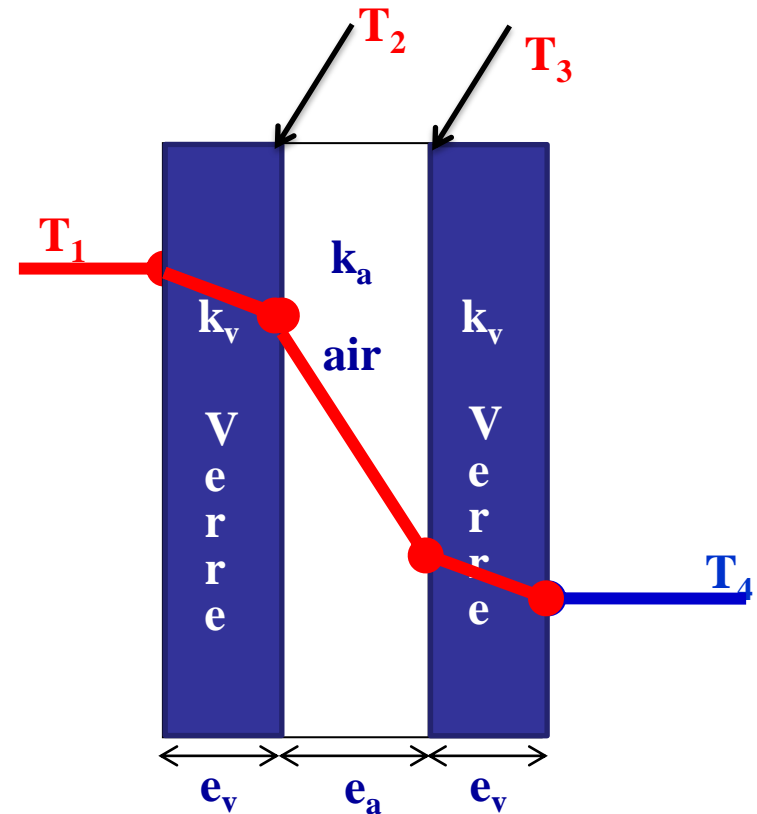
Exemple d'application 2 :

1. calculez les pertes thermiques pour une surface de vitre S.

AN :

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{\left[\frac{2e_v}{k_v S} \right] + \left[\frac{e_a}{k_a S} \right]}$$

$$\dot{q} = \frac{5}{\left[\frac{2 \cdot 3,5 \cdot 10^{-3}}{0,7 \cdot 1} \right] + \left[\frac{12 \cdot 10^{-3}}{0,024 \cdot 1} \right]} = \frac{5}{0,01 + 0,5} = 9,8 \text{ W}$$

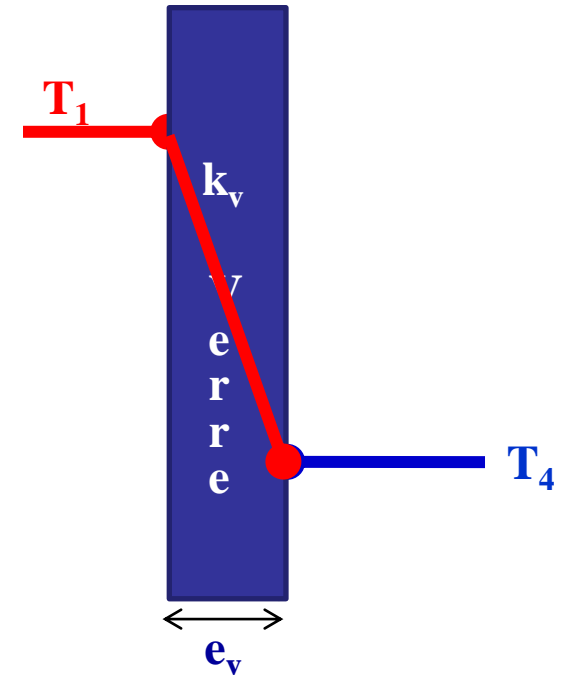


Exemple d'application 2 :

2. Comparez ces pertes thermiques à celles qui seraient obtenues avec une seule vitre d'épaisseur e_v .

$$\dot{q}' = \frac{\Delta T}{\left[\frac{e_v}{k_v S} \right]}$$

$$\dot{q}' = \frac{5}{\left[\frac{3,510^{-3}}{0,71} \right]} = \frac{5}{0,005} = 1000 \text{ W}$$



Conclusion : Si on considère uniquement les échanges par conduction (on verra au chapitre suivant (convection) que le résultat est modifié du fait des échanges par convection), le double vitrage permet de réduire **100** fois les pertes thermiques à travers la vitre. Ceci est surtout dû à la résistance thermique très élevée de la couche d'air, car l'air a une faible conductivité thermique .

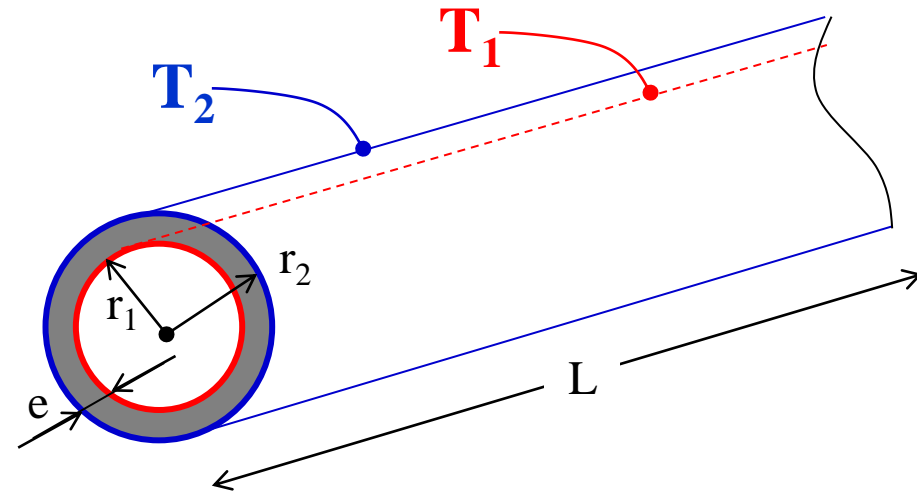
V. Transfert thermique

f) Écoulement **stationnaire** de chaleur ($k = \text{Cte}$)

3. Conduction à travers la paroi d'un tube cylindrique

Considérons un tube cylindrique (voir figure)

Soient r_1 le rayon de la paroi interne, r_2 celui de la paroi externe, T_1 et T_2 , les températures respectives des faces interne et externe et k la conductivité thermique du matériau constituant le tube.



a. Expression du flux thermique à travers un tube cylindrique

On désire connaître le flux thermique qui traverse le tube de l'intérieur vers l'extérieur (lorsque $T_1 > T_2$) pour une longueur L de tube. Par raison de symétrie, les lignes d'écoulement de la chaleur sont des droites dirigées selon des rayons. On dit que le transfert de chaleur est radial

V. Transfert thermique

f) Écoulement *stationnaire* de chaleur ($k = \text{Cte}$)

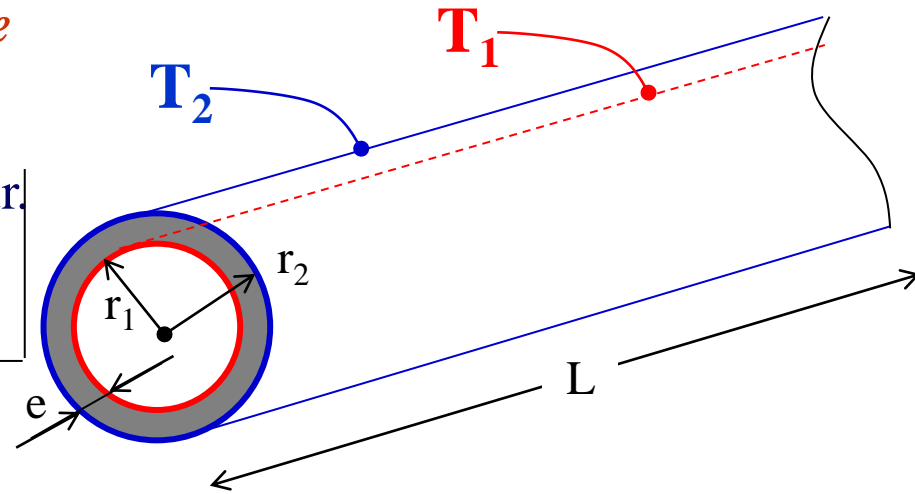
3. Conduction à travers la paroi d'un tube cylindrique

a. Expression du flux thermique et le profil de température

Hypothèses : ❶ Pas de génération de chaleur.

❷ $k \neq k(p, T)$.

❸ $T = T(r)$.



→ Conditions aux limites

→ Écoulement unidirectionnel de chaleur : $T = T(r)$
et unidimensionnel : $q = q_r$

→ $k = \text{Cte}$.

V. Transfert thermique

f) Écoulement *stationnaire* de chaleur ($k = \text{Cte}$)

3. Conduction à travers la paroi d'un tube cylindrique

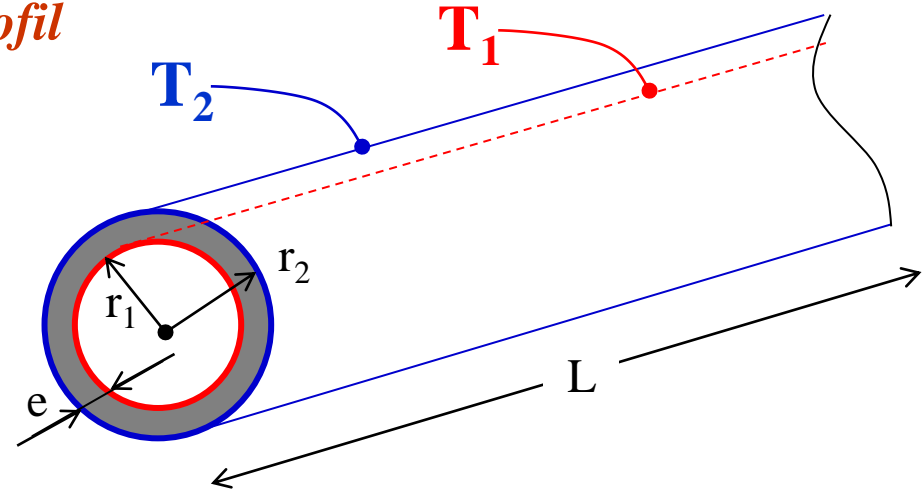
a. Expression du flux thermique et le profil de température

$$\phi = \dot{q} = q_r S(r) = -k \frac{dT}{dr} (2\pi r L) = \text{Cte}$$

$$\dot{q} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -2\pi L k \int_{T_1}^{T_2} dT \Rightarrow$$

$$\dot{q} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k L} \right]} = \frac{(T_1 - T_2)}{\mathcal{R}_k}$$

$$\Rightarrow T(r) = T_1 - \frac{(T_1 - T_2)}{\ln(r_2/r_1)} \ln(r/r_1)$$



Remarque : $L \gg D$, la transfert thermique est purement radial

V. Transfert thermique

f) Écoulement *stationnaire* de chaleur ($k = \text{Cte}$)

3. Conduction à travers la paroi d'un tube cylindrique

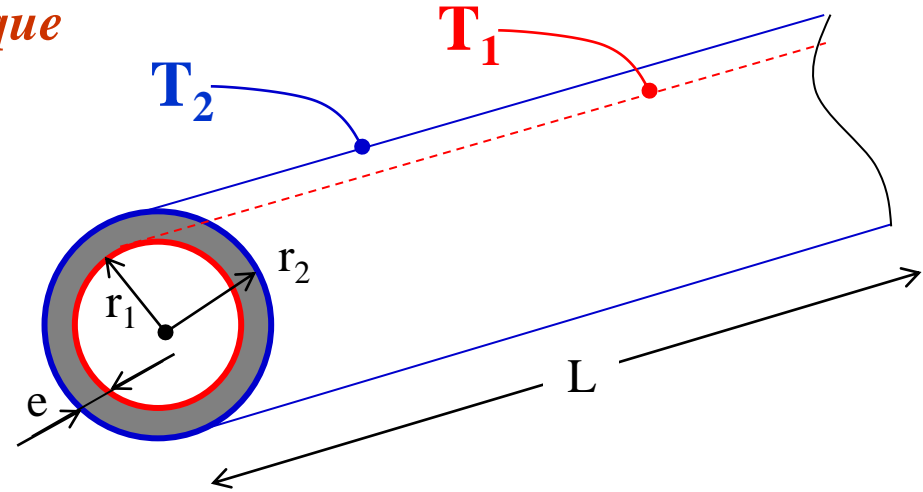
b. Expression de la résistance thermique d'un tube cylindrique

A partir de l'expression du flux, on déduit l'expression de la résistance thermique d'un tube :

$$\dot{q} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k L} \right]} = \frac{(T_1 - T_2)}{\mathcal{R}_k}$$



$$\mathcal{R}_k = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k L}$$



V. Transfert thermique

Exemple d'application 1 :

Soit un tube d'acier d'un rapport de rayon (r_1/r_2) dont la température de la paroi interne est T_1 et celle de la paroi externe T_2 .

La conductivité thermique de l'acier k .

Calculer :

- a) la résistance thermique du tube pour une longueur de 1 m.
- b) le flux correspondant.

Données :

$$T_1 = 119,75^\circ\text{C}, T_2 = 119,64^\circ\text{C} ; k = 46 \text{ W.m}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} ; r_1/r_2 = 20/27$$

V. Transfert thermique

Correction exemple d'application 1 :

a) la résistance thermique du tube pour une longueur de 1 m.

Hypothèses :

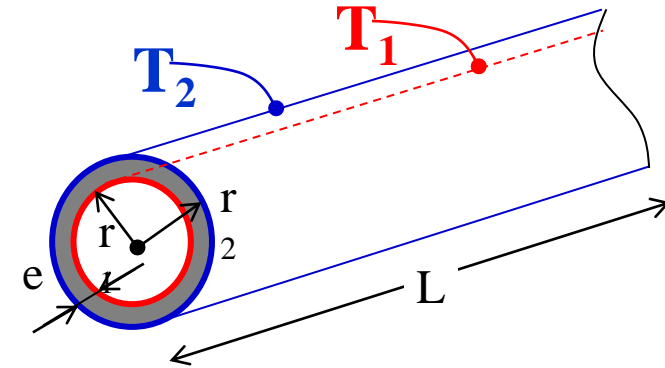
- ❶ Pas de génération de chaleur.
- ❷ $k \neq k(p, T)$.
- ❸ $T = T(r)$.

$$\dot{q} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k L} \right]} = \frac{(T_1 - T_2)}{\mathcal{R}_k} \Rightarrow \mathcal{R}_k = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k L}$$

$$\mathcal{R}_k = \frac{\ln(27/20)}{2\pi 461} = 1,038 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C.W}^{-1}$$

b) Le flux correspondant.

$$\dot{q} = \frac{(T_1 - T_2)}{\mathcal{R}_k} = \frac{(119,75 - 119,64)}{1,038 \cdot 10^{-3}} = 105,97 \text{ W}$$



V. Transfert thermique

f) Écoulement **stationnaire** de chaleur ($k = Cte$)

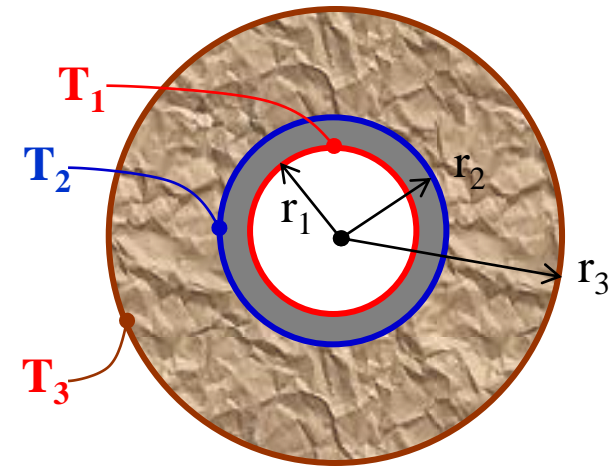
4. Conduction à travers deux tubes concentriques accolés (multicouches)

Considérons 2 tubes concentriques de longueur L en contact thermique parfait (voir figure)

T_1 est la température de la face interne du tube 1 de conductivité thermique k_1 .

T_3 est la température de la face externe du tube 2 de conductivité thermique k_2 .

T_2 est la température de l'interface entre les 2 tubes



$$(T_1 - T_2) = \frac{\dot{q}}{2\pi k_1 L} \ln(r_2/r_1)$$

$$(T_2 - T_3) = \frac{\dot{q}}{2\pi k_2 L} \ln(r_3/r_2)$$

$\oplus \Rightarrow$

$$\dot{q} = \frac{(T_1 - T_3)}{\left[\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_1 L} \right] + \left[\frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_2 L} \right]}$$

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{\sum_i (\mathcal{R}_k)_i}$$

V. Transfert thermique

Exemple d'application 2 :

L'intérieur du tube (rapport de rayon (r_1/r_2)) étudié dans l'exemple précédent est entartré sur une épaisseur de e .

On suppose que les températures intérieures et extérieures restent inchangées : la température de la paroi interne est T_1 et celle de la paroi externe T_2 .

Conductivité thermique du tartre k_c

Calculer :

- a) la résistance thermique de la couche de tartre (pour une longueur de 1 m).
- b) la résistance équivalente du tube entartré.
- c) le flux thermique correspondant.

Données :

$$T_1 = 119,75^\circ\text{C}, T_2 = 119,64^\circ\text{C} ; k = 46 \text{ W.m}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} ; r_1/r_2 = 20/27 ; e = 2 \text{ mm}$$

V. Transfert thermique

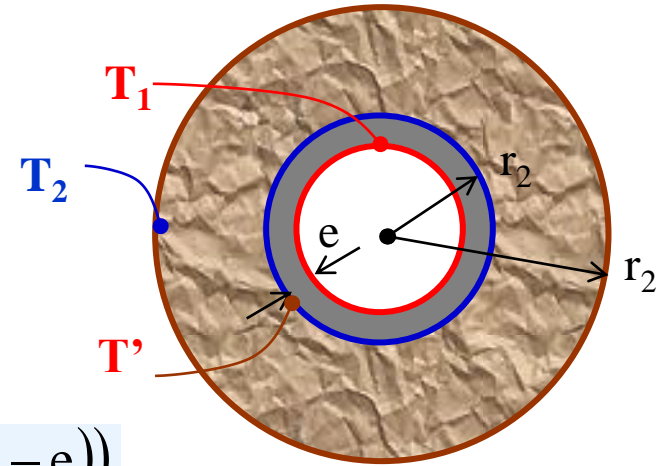
Correction exemple d'application 2 :

a) la résistance thermique de la couche de tartre (pour une longueur de 1 m).

Hypothèses : ❶ Pas de génération de chaleur.

❷ $k \neq k(p, T)$.

❸ $T = T(r)$.



$$\dot{q} = \frac{(T_1 - T')}{\left[\frac{\ln(r_1/(r_1 - e))}{2\pi k_c L} \right]} = \frac{(T_1 - T')}{\mathcal{R}_c} \Rightarrow \mathcal{R}_c = \frac{\ln(r_1/(r_1 - e))}{2\pi k_c L}$$

$$\mathcal{R}_c = \frac{\ln(20/(20 - 2))}{2\pi \cdot 2,2 \cdot 1} = 1,614 \cdot 10^{-2} \text{ } ^\circ\text{C} \cdot \text{W}^{-1}$$

V. Transfert thermique

Correction exemple d'application 2 :

b) la résistance équivalente du tube entartré

La résistance équivalente du tube entartré est la somme de la résistance de la couche de tartre et de la résistance du tube en acier calculée précédemment soit :

$$\dot{q} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\frac{\ln(r_1/(r_1 - e))}{2\pi k_c L} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_t L} \right]} = \frac{(T_1 - T_2)}{\mathcal{R}_{eq}}$$

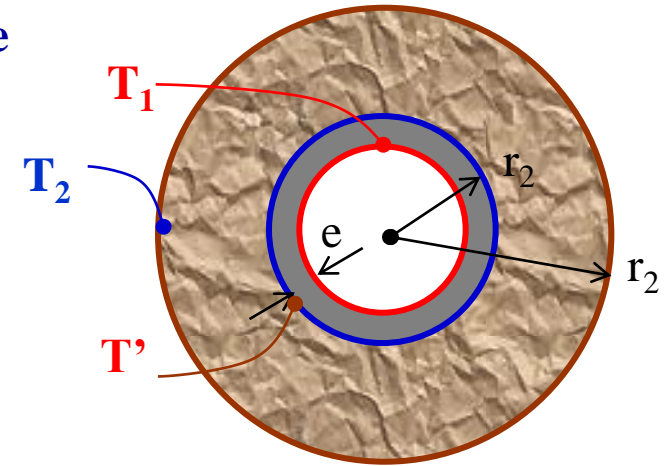


$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_k = \frac{\ln(r_1/(r_1 - e))}{2\pi k_c L} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_t L}$$

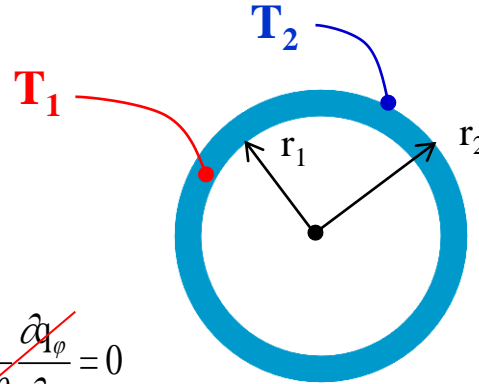
$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_k = 1,614.10^{-2} + 1,038.10^{-3} = 1,718.10^{-2} \text{ } ^\circ\text{C.W}^{-1}$$

c) le flux thermique correspondant.

$$\dot{q} = \frac{(T_1 - T_2)}{\mathcal{R}_{eq}} = \frac{(119,75 - 119,65)}{1,718.10^{-2}} = 6,4 \text{ W}$$



5. Conduction à travers une Sphère creuse : $T_1 > T_2$)



$$\left\{ \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 q_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta q_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} = 0 \\ k \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right] = 0 \end{cases} \right.$$

Profil de température

$$\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = A \longrightarrow T(r) = \frac{A}{r} + B$$

$$T(r) = \frac{A}{r} + B$$

$$\text{CL1: } r = r_1 \longrightarrow T(r_1) = T_1$$

$$\text{CL2: } r = r_2 \longrightarrow T(r_2) = T_2$$

$$A = \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}$$

$$B = T_1 - \left(\frac{1}{r_1} \right) \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}$$

$$T(r) = T_1 + \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Flux de chaleur

$$\dot{q} = \phi = q_r \underbrace{4\pi r^2}_{S(r)} = \text{Cte} \longrightarrow \dot{q} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -4\pi k \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$\dot{q} = \phi = \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \frac{4\pi k}{4\pi k}$$

*h) Transmission de chaleur par convection (**Résistance au transfert**)*

La convection est le mode de propagation de la chaleur dans un fluide (liquide ou gazeux) en mouvement. La transmission de la chaleur entre un solide et un fluide s'effectue par l'action combinée de la conduction et de la convection.

Il existe deux types de transferts convectifs :

1. La **convection forcée** dans laquelle l'écoulement du fluide est forcé par un dispositif mécanique quelconque (pompe ou gravité pour un liquide, ventilateur pour de l'air) ;
2. La **convection naturelle** : lorsqu'il existe une différence de température entre deux points d'un fluide, le fluide chaud, qui aura une masse volumique plus faible que le fluide froid, aura tendance à monter sous l'effet de la poussée d'Archimède.

Donc la convection C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide. Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de Newton :

$$\dot{q} = h S (T_f - T_p)$$

ϕ Flux de chaleur transmis par convection (W)

h Coefficient de transfert de chaleur par convection ($\text{W m}^{-2} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$)

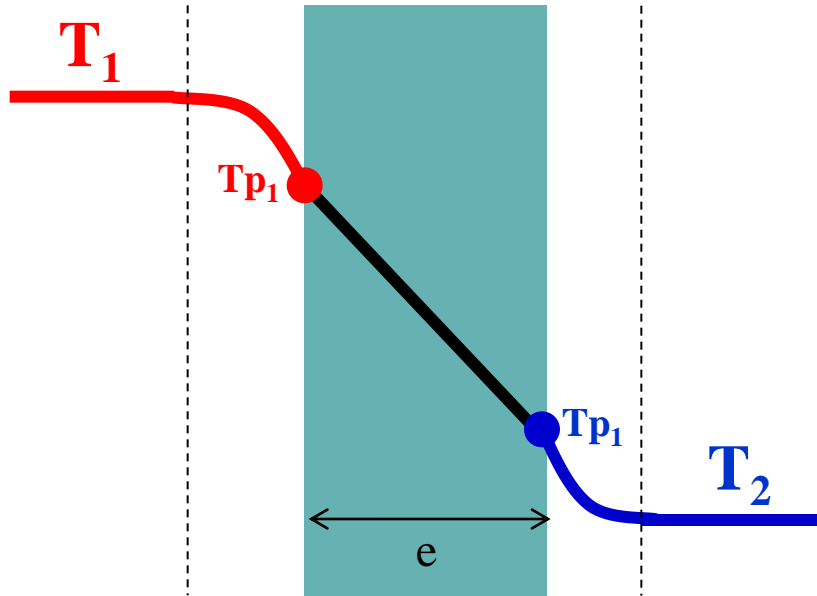
T_p Température de surface du solide ($^\circ\text{C}$)

T_∞ ou T_f : Température du fluide loin de la surface du solide ($^\circ\text{C}$)

S Aire de la surface de contact solide/fluide (m^2)

V. Transfert thermique

a. Mur plan homogène (avec résistance du convection)



$$(T_1 - T_{p1}) = \frac{\dot{q}}{h_1 S} \quad \oplus$$

$$(T_{p1} - T_{p2}) = \frac{\dot{q}}{(kS/e)}$$

$$(T_{p2} - T_2) = \frac{\dot{q}}{h_2 S} \quad \oplus$$

$$\phi = \dot{q} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\frac{1}{h_1 S} \right] + \left[\frac{e}{kS} \right] + \left[\frac{1}{h_2 S} \right]} \quad (V.23)$$

Les coefficients h_1 et h_2 représentent les coefficients de transfert partiel (ou conductance partielle de transfert) interne et externe.

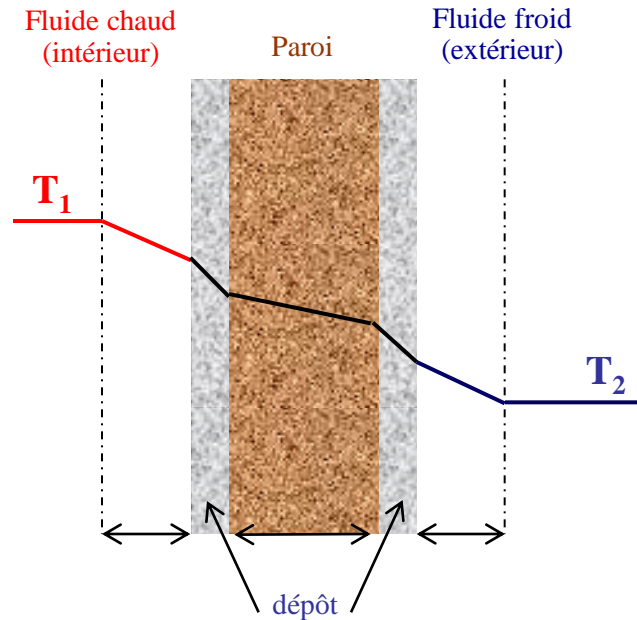
$$\dot{q} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\frac{1}{US_m} \right]} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\left(\frac{1}{h_1 S} \right) + \left(\frac{e}{kS} \right) + \left(\frac{1}{h_2 S} \right) \right]} \quad (V.24)$$

Le coefficient U représente une conductance globale de transfert et S_m désigne une valeur moyenne de la surface solide de séparation.

V. Transfert thermique

2. Coefficient de transfert global U

L'étude du transfert thermique entre le fluide chaud (1) et le fluide froid (2) au travers de la paroi fait apparaître dans le cas le plus général les 5 résistances de transfert indiquées sur la figure ci-dessous :



La résistance globale au transfert est donnée par la relation :

$$\mathcal{R}_{\text{tot}} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_{d1} + \mathcal{R}_p + \mathcal{R}_{d2} + \mathcal{R}_2 \quad (\text{V.25})$$

$\mathcal{R}_1 = (1/h_1 S_1)$ est la résistance de transfert par convection côté fluide chaud.

\mathcal{R}_{d1} : est la résistance de transfert par conduction au sein du dépôt d'encrassement côté fluide chaud.

\mathcal{R}_p : est la résistance de transfert par conduction dans la paroi métallique. (Dans la plupart des cas, cette résistance est négligeable devant les autres).

\mathcal{R}_{d2} : est la résistance de transfert par conduction dans le dépôt d'encrassement côté fluide froid.

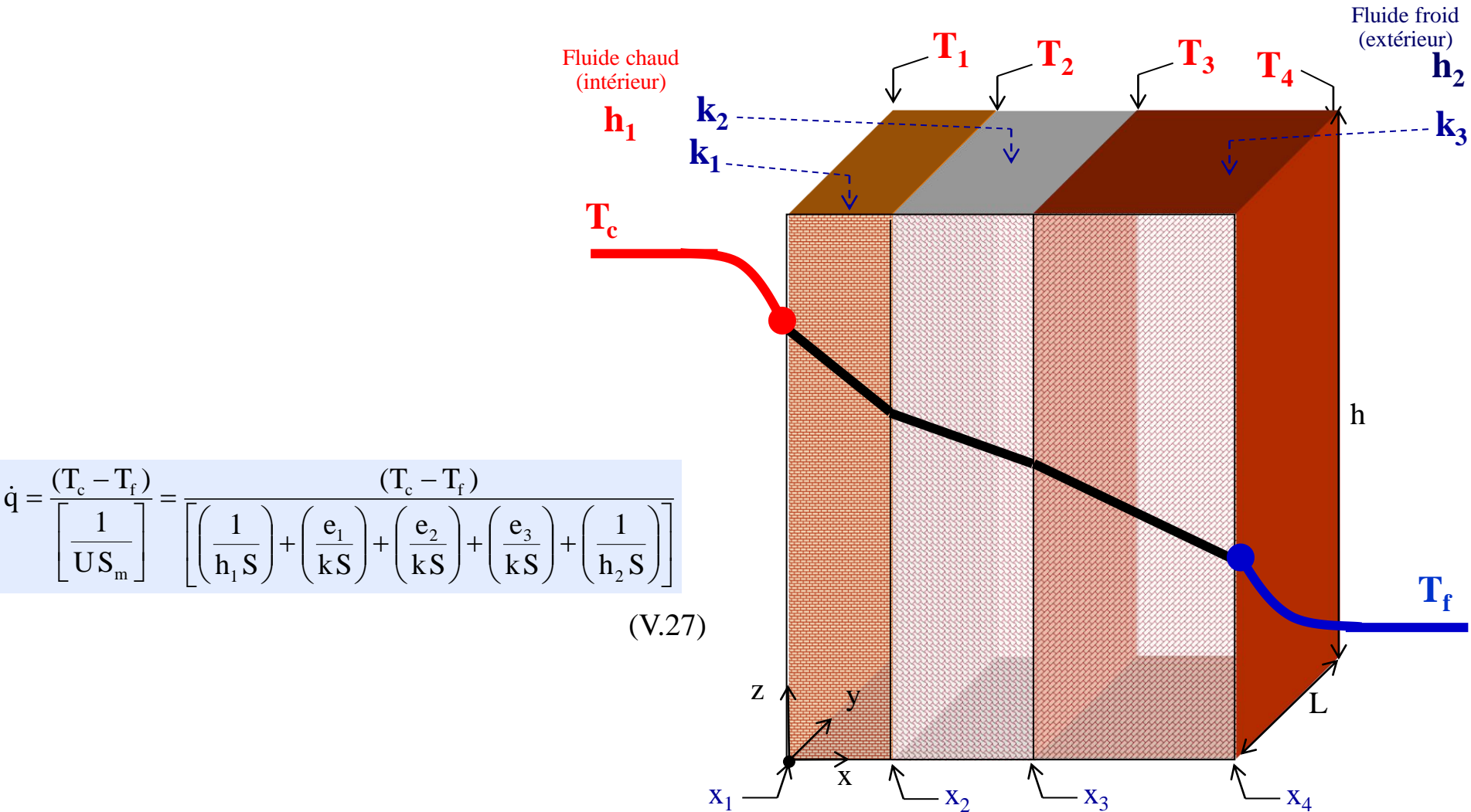
$\mathcal{R}_2 = (1/h_2 S_2)$ est la résistance de transfert par convection côté fluide froid.

Le débit de chaleur transféré faisant apparaître une surface de transfert, il est nécessaire de rapporter les résistances de transfert énumérées précédemment à une même surface de référence. Dans les échangeurs industriels, quel que soit leur type, *le fluide chaud (1) circule à l'intérieur du tube, alors que le fluide froid (2) circule à l'extérieur*, sauf cas très particulier. Généralement, *on convient de choisir en référence la surface extérieure du tube chaud*.

$$\dot{q} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\frac{1}{U S_2} \right]} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\left(\frac{1}{h_1 S_1} \right) + \mathcal{R}_{d1} + \mathcal{R}_p + \mathcal{R}_{d2} + \left(\frac{1}{h_2 S_2} \right) \right]} \quad (\text{V.26})$$

V. Transfert thermique

a. Mur composite multicouches (avec résistance du convection)



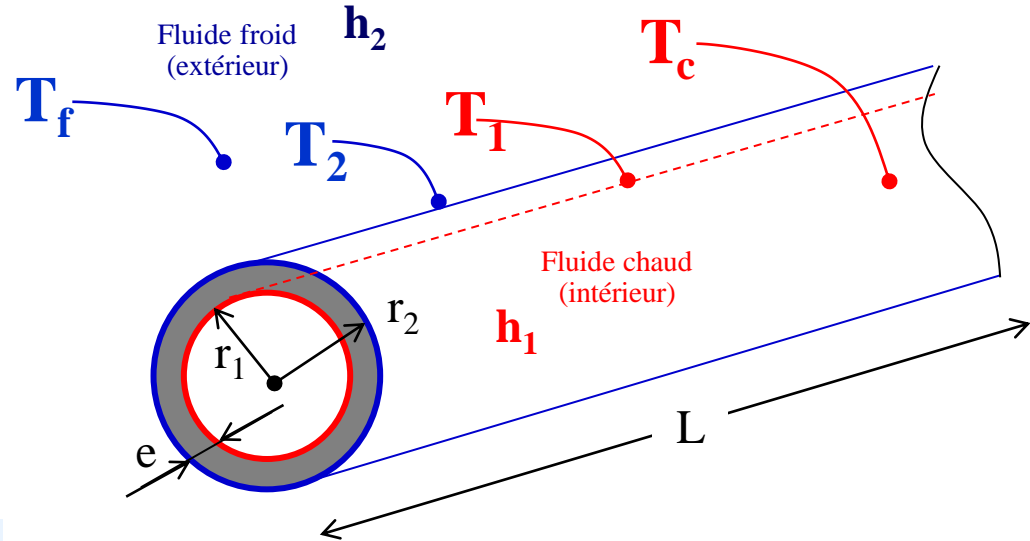
V. Transfert thermique

b. Tube cylindrique (avec résistance du convection)

$$\dot{q} = \frac{(T_c - T_1)}{\frac{1}{h_1 s_1}} = \frac{(T_c - T_1)}{\frac{1}{h_1 2 \pi L r_1}} = \frac{(T_c - T_1)}{\mathcal{R}_{cv_1}}$$

$$\dot{q} = \frac{(T_1 - T_2)}{\left[\frac{\ln(r_2/r_1)}{2 \pi k L} \right]} = \frac{(T_1 - T_2)}{\mathcal{R}_{cd}}$$

$$\dot{q} = \frac{(T_2 - T_f)}{\frac{1}{h_2 s_2}} = \frac{(T_2 - T_f)}{\frac{1}{h_2 2 \pi L r_2}} = \frac{(T_2 - T_f)}{\mathcal{R}_{cv_2}}$$



V. Transfert thermique

b. Tube cylindrique (avec résistance du convection)

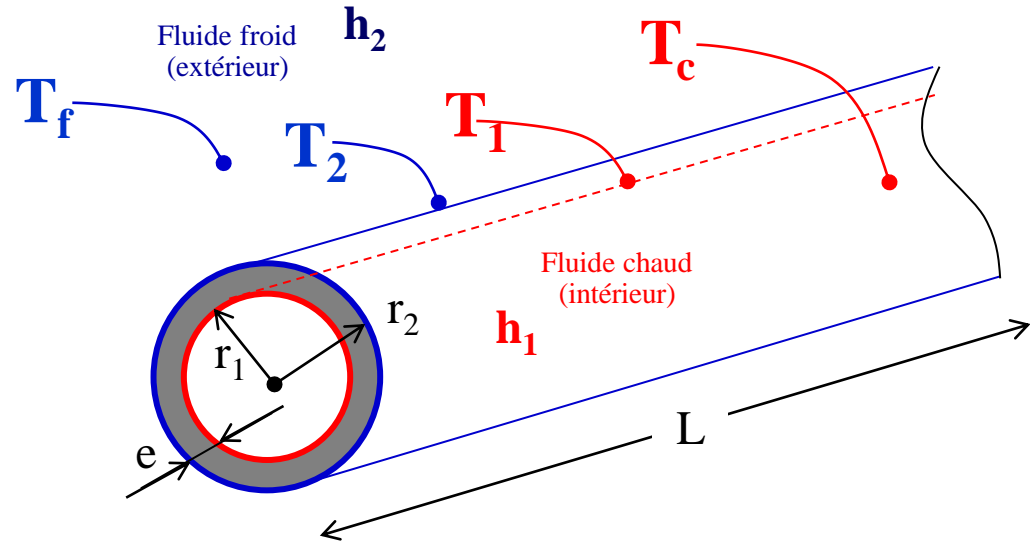
$$(T_c - T_1) = \frac{\dot{q}}{h_1 2 \pi L r_1}$$

⊕

$$(T_1 - T_2) = \dot{q} \left[\frac{\ln(r_2/r_1)}{2 \pi k L} \right]$$

⊕

$$(T_2 - T_f) = \frac{\dot{q}}{h_2 2 \pi L r_2}$$



$$\dot{q} = \frac{(T_c - T_f)}{\frac{1}{h_1 2 \pi L r_1} + \left[\frac{\ln(r_2/r_1)}{2 \pi k L} \right] + \frac{1}{h_2 2 \pi L r_2}} = \frac{(T_c - T_f)}{\mathcal{R}_{cv_1} + \mathcal{R}_{cd} + \mathcal{R}_{cv_2}} = \frac{(T_c - T_f)}{\sum_i (\mathcal{R}_k)_i} = \frac{(T_c - T_f)}{\left[\frac{1}{US_2} \right]}$$

$$\frac{1}{U} = \frac{r_2}{h_1 r_1} + \left[\frac{r_2 \ln(r_2/r_1)}{k} \right] + \frac{1}{h_2}$$

V. Transfert thermique

b. Conduction à travers deux tubes concentriques accolés (multicouches)

Considérons 2 tubes concentriques de longueur L en contact thermique parfait (voir figure)

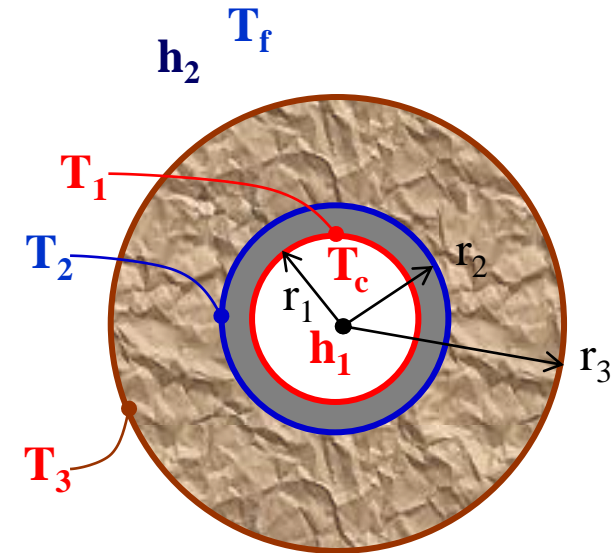
T_1 est la température de la face interne du tube 1 de conductivité thermique k_1 .

T_3 est la température de la face externe du tube 2 de conductivité thermique k_2 .

T_2 est la température de l'interface entre les 2 tubes

T_c la température de fluide chaud qui s'écoule à l'intérieur du tub interne.

T_c la température de fluide chaud qui s'écoule à l'intérieur du tub externe.



$$\dot{q} = \frac{(T_c - T_f)}{\frac{1}{h_1 2 \pi L r_1} + \left[\frac{\ln(r_2/r_1)}{2 \pi k_1 L} \right] + \left[\frac{\ln(r_3/r_2)}{2 \pi k_2 L} \right] + \frac{1}{h_2 2 \pi L r_3}} = \frac{(T_c - T_f)}{\left[\frac{1}{US_2} \right]}$$

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{\sum_i (\mathcal{R}_k)_i}$$

$$\frac{1}{U} = \frac{r_3}{h_1 r_1} + \left[\frac{r_3 \ln(r_2/r_1)}{k} \right] + \left[\frac{r_3 \ln(r_3/r_2)}{k_2} \right] + \frac{1}{h_2}$$

V. Transfert thermique

Exemple d'application 3 :

L'intérieur du tube du rapport de rayon (r_1/r_2) (étudié dans le cas du conduction), entartré sur une épaisseur de « e » circule la vapeur d'eau à T_c .

Coefficient d'échange thermique entre la vapeur d'eau et la paroi interne est $h_i = 5 \text{ W/ m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$.

Conductivité thermique du tartre k_c

la température de l'aire à l'extérieur est T_f (Coefficient d'échange thermique d'air est h_e)

Calculer :

a) le flux thermique correspondant (pour une longueur de 1 m).

b) Coefficient d'échange globale.

Données :

$T_c = 125^\circ\text{C}$, $k_c = 2,2 \text{ W.m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$; $k = 46 \text{ W.m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$; $r_1/r_2 = 20/27$; $e = 2 \text{ mm}$, $h_i = 5 \text{ W/ m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$, $h_e = 4 \text{ W/ m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$. $T_f = 116^\circ\text{C}$

V. Transfert thermique

Correction : exemple d'application 4 :

a) le flux thermique correspondant (pour une longueur de 1 m).

$$\dot{q} = \frac{(T_c - T_f)}{\frac{1}{h_i 2 \pi L (r_1 - e)} + \left[\frac{\ln(r_1 / (r_1 - e))}{2 \pi k_c L} + \frac{\ln(r_2 / r_1)}{2 \pi k_t L} \right] + \frac{1}{h_e 2 \pi L r_2}}$$

$$\dot{q} = \frac{125 - 116}{\frac{1}{5.2 \pi 1 (20 - 2) 10^{-3}} + \left[\frac{\ln(20 / (20 - 2))}{2 \pi 2.2 1} + \frac{\ln(27 / 20)}{2 \pi 46.1} \right] + \frac{1}{4.2 \pi 1.27 10^{-3}}} = 2.78 \text{ W}$$

b) Coefficient d'échange globale.

$$\dot{q} = \frac{(T_c - T_f)}{\left[\frac{1}{U S_2} \right]} \longrightarrow U = \frac{\dot{q}}{(T_c - T_f) S_2} = \frac{\dot{q}}{(T_c - T_f) 2 \pi L r_2}$$

Correction : exemple d'application 4 :

b) Coefficient d'échange globale.

$$\dot{q} = \frac{(T_c - T_f)}{\left[\frac{1}{US_2} \right]} \longrightarrow U = \frac{\dot{q}}{(T_c - T_f)S_2} = \frac{\dot{q}}{(T_c - T_f)2\pi Lr_2}$$

$$U = \frac{2,78}{(125 - 118)2\pi 1.2710^{-3}} = 5,88 \text{ W} / \text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$$

V. Transfert thermique

Correction : exemple d'application 4 :

c) Calculer T_1 et T_2 .

$$\dot{q} = \frac{(T_c - T_1)}{\frac{1}{h_i 2 \pi L (r_1 - e)}}$$



$$T_1 = T_c - \frac{\dot{q}}{h_i 2 \pi L (r_1 - e)}$$

$$T_1 = 125 - \frac{2,78}{52 \pi 1 (20 - 2) 10^{-3}} = 120,08^\circ\text{C}$$

$$\dot{q} = \frac{(T_2 - T_f)}{\frac{1}{h_e 2 \pi L r_2}}$$

$$T_2 = T_f + \frac{\dot{q}}{h_e 2 \pi L r_2}$$