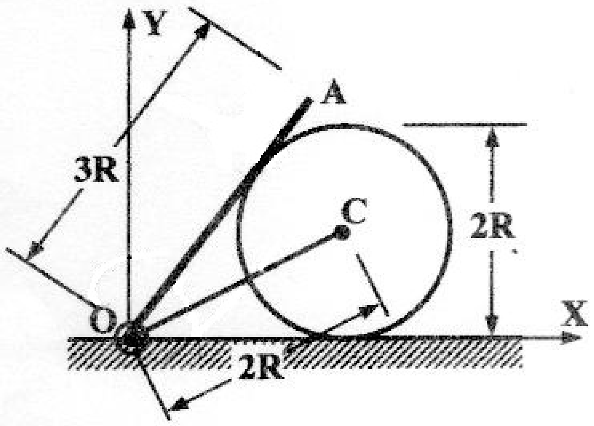
USTHB/FGMGP
$2^{ème}$ année Licence. ST

Janvier 2012

Epreuve fondamentale de mécanique rationnelle

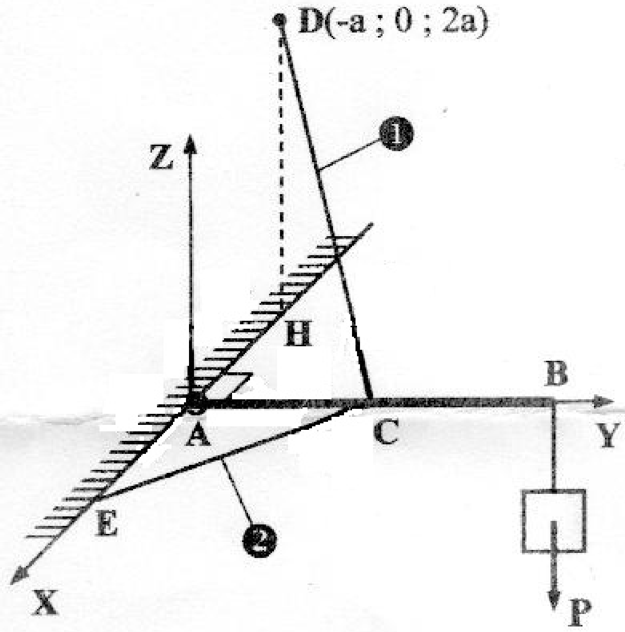
Documents non autorisés - temps alloué : 1 ^{H} 30 mn.

EXERCICE 1 : (6 points)



Une barre homogène **OA**, de poids **P = 100 N** et de longueur **3R**, est articulée en **O**, autour d'un axe horizontal **OZ**. Elle s'appuie sur un cylindre lisse (sans Frottements) de rayon **R = 20 cm** et de poids **Q = 200 N** ; lequel s'appuyant sur un plan horizontal lisse.
Le cylindre est maintenu dans sa position d'équilibre ci-indiquée, par un fil inextensible **OC** de longueur **2R.**
Déterminer la tension du fil, ainsi que la réaction en **O**.

EXERCICE 2 : (7 points)

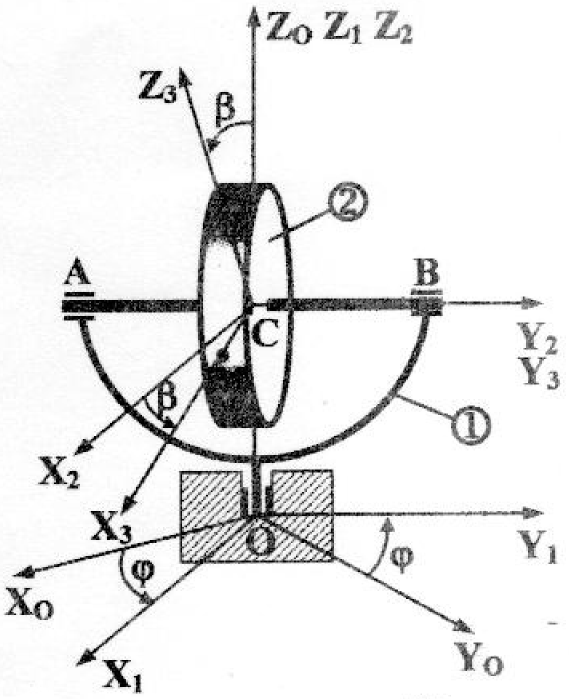


Une barre horizontale **AB**, de poids négligeable, liée au mur à l'aide d'une articulation sphérique **A**, est maintenue dans sa position perpendiculaire au mur, grâce à deux câbles **CD** et **EC**, comme indiqué sur la figure ci-contre.
A son extrémité **B** est suspendu un poids **P = 100 N.**

Données : **AC = AH = AE = a = 1 m**
AB = HD = 2a = 2 m
Les coordonnées de **D** sont : **(-a ; 0 ; 2a)**

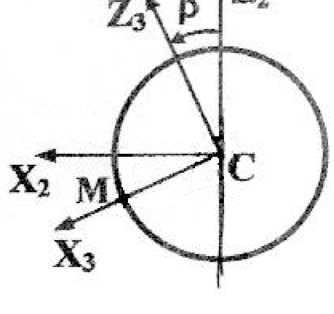
Déterminer la réaction de l'articulation sphérique **A** , ainsi que les tensions $\mathbf{T_1}$ (du câble ❶) et $\mathbf{T_2}$ (du câble ❷).

EXERCICE 3: (7 points)



Soit le système mécanique composé:
- d'un cadre ① ayant un pivot (articulation cylindrique) en **O** , animé d'un mouvement de rotation à vitesse constante $\dot{\varphi}$ autour de l'axe $\mathbf{OZ_O}$.
- d'un disque ② de rayon **R** et d'épaisseur négligeable, soudé à un axe **AB** , lié au cadre ① par les deux articulations cylindriques **A** et **B** ; le disque est animé d'un mouvement de rotation à vitesse constante $\dot{\beta}$ autour de l'axe $\mathbf{CY_2}$.

On donne : **OC = AC = CB = L ;** $\overrightarrow{CM} = R\ \overrightarrow{X_3}$.
$\mathbf{R_O}$ (O,X_O,Y_O,Z_O) : repère fixe ; $\mathbf{R_1}$ (O,X_1,Y_1,Z_1) : repère lié au cadre ①.
$\mathbf{R_2}$ (C,X_2,Y_2,Z_2) // à $\mathbf{R_1}$; $\mathbf{R_3}$ (C,X_3,Y_3,Z_3) : repère lié au disque ② .



1°/ **Etablir** les figures planes représentatives des différentes rotations.
2°/ **Déterminer** le vecteur rotation instantanée du disque par rapport à $\mathbf{R_O}$ exprimé dans $\mathbf{R_2}$.
3°/ **Déterminer** par dérivation, la vitesse absolue (par rapport à R_0) de **M** , exprimée dans $\mathbf{R_2}$.
4°/ **En déduire** la vitesse absolue de **M** exprimée dans $\mathbf{R_1}$ et ensuite dans $\mathbf{R_0}$.
5°/ **Déterminer** par dérivation la vitesse de **M** par rapport à $\mathbf{R_1}$, exprimée dans $\mathbf{R_2}$
6°/ **Déterminer** par dérivation, l'accélération absolue (par rapport à R_0) de **M** exprimée dans $\mathbf{R_2}$.

Bonne réussite

USTHB / FGMGP / 2ème année licence ST

Janvier 2012

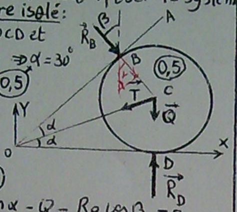
Corrigé de l'épreuve fondamentale de mécanique rationnelle

EX1 : le système barre + cylindre est hyperstatique ⇒ décomposer le système

Equilibre du cylindre isolé :

dans les 2 triangles OCD et OCB : $\sin\alpha = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$

$\Rightarrow \beta = 2\alpha = 60°$. (0,5)



$\sum F_x = 0 \Rightarrow$

$R_B \sin\beta - T\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow R_B = T$ (1) (0,5)

$\sum F_Y = 0 \Rightarrow R_D - T\sin\alpha - Q - R_B\cos\beta = 0$

$\Rightarrow R_D - Q = \frac{T + R_B}{2}$ (2) (0,5) ou (1) sans (3)

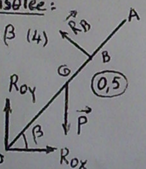
$\sum M_{z/O} = 0 \Rightarrow (R_D - Q)\sqrt{3}R - R_B\sqrt{3}R = 0$

$\Rightarrow R_D - Q = R_B$ (3) (0,5) ou (1) sans (2) idem que (2) avec (1)

les 4 forces $\vec{R}_D$, $\vec{R}_B$, $\vec{T}$ et $\vec{Q}$ sont concourantes en C ⇒ on ne peut poser que 2 équations statiques

Equilibre de la barre isolée :

$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ox} = R_B \sin\beta$ (4) (0,5)



$\sum F_y = 0 \Rightarrow$

$R_B\cos\beta - P + R_{Oy} = 0$ (5) (0,5)

$\sum M_{z/O} = 0 \Rightarrow$

$R_B \cdot \sqrt{3}R = P\,\frac{3R}{2}\cos\beta$ (6)

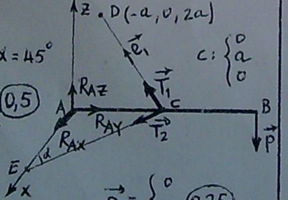
(6) $\Rightarrow R_B = \frac{\sqrt{3}}{4}P$ (0,5) (1) $\Rightarrow T = R_B = \frac{\sqrt{3}}{4}P$ (0,5) $= 43{,}3$ N

(4) $\Rightarrow R_{Ox} = \frac{3}{8}P = 37{,}5$ N (0,5)

(5) $\Rightarrow R_{Oy} = \left(\frac{8-\sqrt{3}}{8}\right)P = 78{,}35$ N (0,5)

EX2 :

Dans le Δ ACE : $\alpha = 45°$



C : $\begin{cases} 0 \\ a \\ 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{T}_2 = \begin{cases} T_2/\sqrt{2} \\ -T_2/\sqrt{2} \\ 0 \end{cases}$ (0,5)

$\vec{R}_A = \begin{cases} R_{AX} \\ R_{AY} \\ R_{AZ} \end{cases}$ (0,25) $\vec{P} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -P \end{cases}$ (0,25)

$\vec{T}_1 = T_1\,\vec{e}_1 = T_1 \frac{\vec{CD}}{|\vec{CD}|}$; $\vec{CD} = \begin{cases} -a \\ -a \\ 2a \end{cases}$

$|\vec{CD}| = \sqrt{6}\,a$

$\Rightarrow \vec{T}_1 = \begin{cases} -T_1/\sqrt{6} \\ -T_1/\sqrt{6} \\ 2T_1/\sqrt{6} \end{cases}$ (1) ; $\vec{AC} = \begin{cases} 0 \\ a \\ 0 \end{cases}$ $\vec{AB} = \begin{cases} 0 \\ 2a \\ 0 \end{cases}$

0,4 0,4 0,81

$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_A + \vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$ (0,25)

$$\Rightarrow \begin{cases} R_{AX} - \frac{T_1}{\sqrt{6}} + \frac{T_2}{\sqrt{2}} = 0 & (1)\ (0{,}5) \\ R_{AY} - \frac{T_1}{\sqrt{6}} - \frac{T_2}{\sqrt{2}} = 0 & (2)\ (0{,}5) \\ R_{AZ} - P + \frac{2T_1}{\sqrt{6}} = 0 & (3)\ (0{,}5) \end{cases}$$

$\sum \vec{M}_{/A} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AC} \wedge (\vec{T}_1 + \vec{T}_2) + \vec{AB} \wedge \vec{P} = \vec{0}$ (0,5)

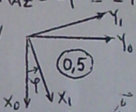
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ 0 & a & 0 \\ -\frac{T_1}{\sqrt{6}} + \frac{T_2}{\sqrt{2}} & -\frac{T_1}{\sqrt{6}} - \frac{T_2}{\sqrt{2}} & \frac{2T_1}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{X} & \vec{Y} & \vec{Z} \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{vmatrix} = \vec{0}$$

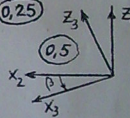
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2aT_1}{\sqrt{6}} - 2aP = 0 \ (0{,}75)\ (4) & \Rightarrow T_1 = \sqrt{6}P = 245 \text{ N}\ (0{,}25) \\ \text{pas de moments autour de } \vec{Y} & \\ a\left(\frac{T_1}{\sqrt{6}} - \frac{T_2}{\sqrt{2}}\right) = 0 \ (0{,}75)\ (5) & \Rightarrow T_2 = \sqrt{2}P = 141{,}42 \text{ N}\ (0{,}25) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow R_{AX} = 0$ (0,25) (2) $\Rightarrow R_{AY} = 2P = 200$ N (0,25)

(3) $\Rightarrow R_{AZ} = -P = -100$ N (0,25)

EX3 : 1°/





2°/ $\vec{\Omega}^0_{3/R_2} = \vec{\Omega}^2_3 + \cancel{\vec{\Omega}^1_2} + \vec{\Omega}^0_1 = \begin{cases} 0 \\ \dot\beta \\ \dot\varphi \end{cases}_{R_2}$ (1)

3°/ $\vec{OM} = \begin{cases} R\cos\beta \\ 0 \\ L - R\sin\beta \end{cases}_{R_2}$ (0,5) ;

$\vec{V}^0(M)_{/R_2} = \frac{d}{dt}\left(\vec{OM}_{/R_2}\right) + \vec{\Omega}^0_2 \wedge \vec{OM} = \begin{cases} -R\dot\beta\sin\beta \\ R\dot\varphi\cos\beta \\ -R\dot\beta\cos\beta \end{cases}_{R_2}$ (1)

4°/ $\vec{V}^0(M) = \begin{cases} -R\dot\beta\sin\beta \\ R\dot\varphi\cos\beta \\ -R\dot\beta\cos\beta \end{cases}_{R_1}$ (0,25) $= \begin{cases} -R\dot\beta\sin\beta\cos\varphi - R\dot\varphi\cos\beta\sin\varphi \\ -R\dot\beta\sin\beta\sin\varphi + R\dot\varphi\cos\beta\cos\varphi \\ -R\dot\beta\cos\beta \end{cases}_{R_0}$ (0,75)

5°/ $\vec{V}^1(M)_{/R_2} = \frac{d}{dt}\left(\vec{OM}_{/R_2}\right) = \begin{cases} -R\dot\beta\sin\beta \\ 0 \\ -R\dot\beta\cos\beta \end{cases}_{R_2}$ (1)

6°/ $\vec{\gamma}^0(M)_{/R_2} = \frac{d}{dt}\left[\vec{V}^0(M)_{/R_2}\right] + \vec{\Omega}^0_2 \wedge \vec{V}^0(M)_{/R_2}$ (0,5)

$$= \begin{cases} -R\dot\beta^2\cos\beta \\ -R\dot\varphi\dot\beta\sin\beta \\ R\dot\beta^2\sin\beta \end{cases} + \begin{vmatrix} \vec{X}_2 & \vec{Y}_2 & \vec{Z}_2 \\ 0 & 0 & \dot\varphi \\ -R\dot\beta\sin\beta & R\dot\varphi\cos\beta & -R\dot\beta\cos\beta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{cases} -R\cos\beta\,(\dot\beta^2 + \dot\varphi^2) \\ -2R\dot\varphi\dot\beta\sin\beta \\ R\dot\beta^2\sin\beta \end{cases}_{R_2} \quad (1)$$

Fin