Chapitre II :

Traction & Compression

(Robert Hooke)

En 1660, il découvre la loi de Hooke d'élasticité, qui décrit la variation linéaire de tension avec l'extension

L. DOUADJI
Faculty of Mechanical Engineering & Process Engineering
Department of Materials Science

Sommaire

1. Définitions

1.1. Traction :

Une poutre droite est sollicitée en traction chaque fois que les actions à ses extrémités (A et B) se réduisent à deux forces ($\vec{F}$ et - $\vec{F}$) égales et directement opposées, qui tendent à l'allonger.

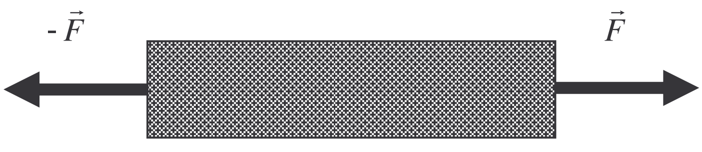
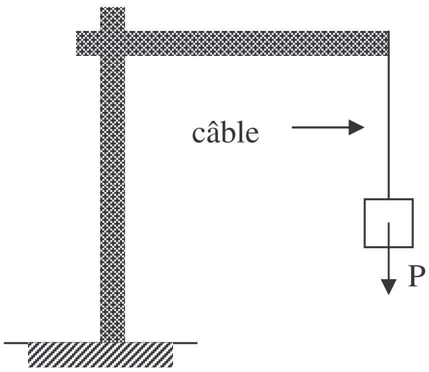


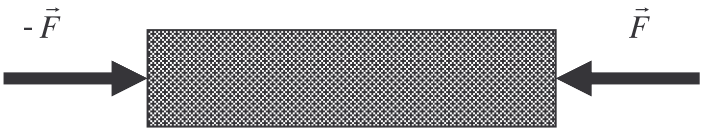
Fig.1

Exemple :
Un câble soulevant une charge



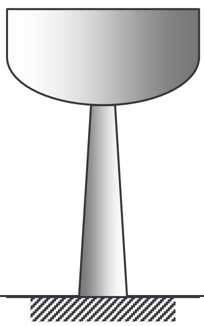
1.2. Compression :

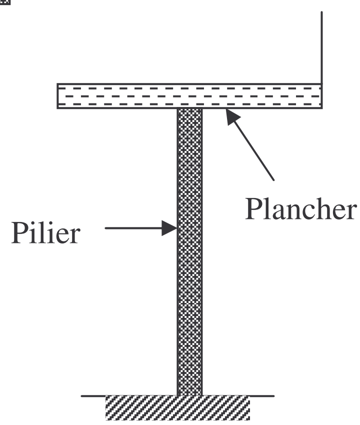
Un corps est sollicité à la compression si les forces extérieures se réduisent à deux forces égales, directement opposées, qui tendent à le raccourcir.



Exemple :

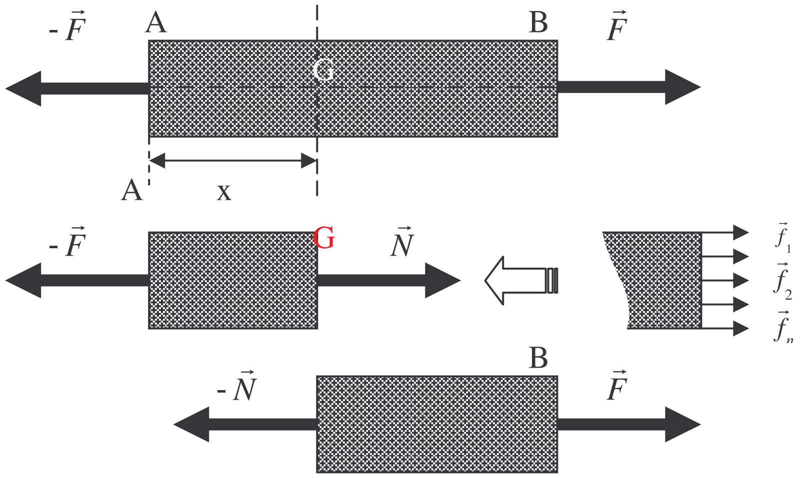
Un pilier supportant une partie du poids d'un plancher.





2. Effort normal

Faisons une coupure fictive dans la poutre précédente (fig.1) (section droite S, située à une distance x du point A) entre les deux extrémités A et B, de façon à faire apparaître les efforts intérieurs dans la poutre. Cette coupure S divise la poutre en deux tronçons AG et GB.



Si on isole le tronçon AG, la résultante des actions $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \ldots\ldots \vec{f}_n$ qui s'exercent en chaque point de la coupure par le tronçon GB se réduit au seul effort normal $\vec{N}$ en G (centre de gravité de la section S).

On a donc $N = F, \ \forall x$

3. Contrainte Normale.

On étudie le cas d'une barre rectiligne de section S, de Longueur L, fixée à une extrémité et soumise à un effort de traction à l'extrémité libre. Cet effort N est supposé uniformément réparti sur toute la section S, donc à chaque mm^2 est appliqué la force N/S.

L'équilibre étant réalisé on imagine une coupure de la barre par un plan AB en deux tronçons (I) et (II). Pour maintenir le tronçon (I) en équilibre, on applique une force $\vec{\sigma}_n$, à chaque unité de surface, normale à cette section. L'ensemble de ces forces représente la traction du tronçon (II) sur le tronçon (I). On néglige le poids du tronçon (I) devant l'effort de traction N. L'équation de l'équilibre de ce tronçon s'écrit :

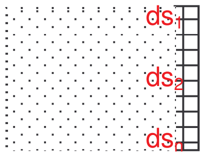
$$\sum \vec{F}_{ext} = 0 \rightarrow \iint_S \sigma_N \, dS - N = 0$$

Lorsqu'on a une répartition constante des $\vec{\sigma}_n$ sur la section S, on obtient :

$$\sigma_n .S = N$$

Avec σ_n = N/S est La contrainte Normale.

σ_n : La contrainte normale en MPa
N : L'effort normal en N
S : La section droite en mm^2



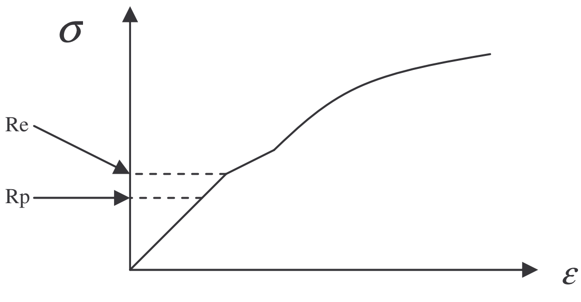
4. Condition de résistance.

Pour des conditions de sécurité liées à l'usage de l'appareil, la contrainte σ_n précédemment déterminée doit rester inférieure à une contrainte limite admissible, appelée résistance pratique à l'extension R_p.

La résistance pratique R_p est fixée par des normes ou par le constructeur. Dans le cas général, R_p est définie à partir de la limite élastique R_e du matériau, déterminée par l'essai de traction.

$$\sigma_{max} = \frac{N}{S} \leq R_P = \frac{R_e}{Cs}$$

avec Cs le coefficient de sécurité.



Exemple : Si on impose une contrainte admissible de 100 MPa, déterminons le diamètre d minimal d'une poutre en acier pour qu'elle résiste en toute sécurité, ainsi que le coefficient de sécurité adopté. Effort N = 62 000 N.
L'acier employé a pour caractéristique : R_e = 300 MPa

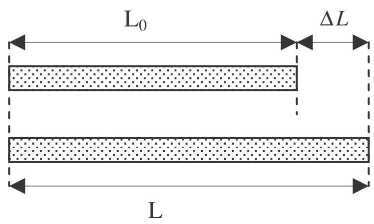
Détermination du diamètre d :

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{S} = \frac{62000}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq 100 \text{ d'où d} \geq 28.1mm$$

Détermination du coefficient de sécurité :

$R_P = \frac{R_e}{Cs}$ ou $Cs = \frac{R_e}{R_P}$ = 300/100= 3

5. Déformations
5.1. L'allongement



L_0 : Longueur initiale de la poutre
L : Longueur finale de la poutre
ΔL : Allongement total de la poutre

L'expérimentation montre que les allongements sont proportionnels aux longueurs initiales. L'allongement relatif (déformation ε) traduit cette propriété :

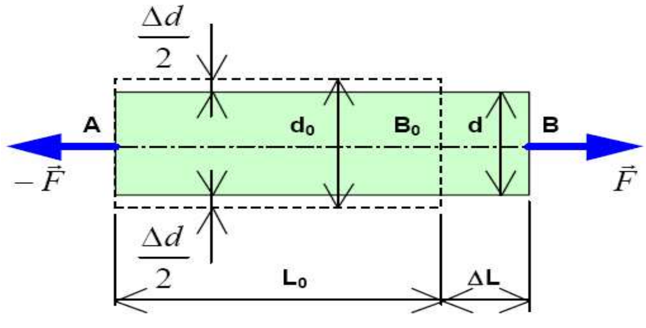
$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

5.2. Contraction latérale- Coefficient de Poisson

Le coefficient de Poisson ν caractérise le rapport entre la contraction latérale ε_d et l'allongement relatif de la poutre ε_L :

$\varepsilon_d = \frac{\Delta d}{d_0}$ et $\varepsilon_L = \frac{\Delta L}{L_0}$

Alors $\nu = -\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_L}$



6. Relation contraintes- Déformations.

L. DOUADJI
Faculty of Mechanical Engineering & Process Engineering
Department of Materials Science

6.1. Loi de Hooke.

Pour un grand nombre de matériaux, l'essai de traction monte qu'il existe une zone élastique pour laquelle l'effort $\vec{F}$ de traction est proportionnel à l'allongement ΔL. Autrement dit, le rapport $F / \Delta L$ est constant (analogie avec un ressort $F = k\,x$).
Cette propriété est énoncée par la loi de Hooke : en déformation élastique, la contrainte normale σ est proportionnelle à l'allongement relatif ε :

$$\sigma = E\,\varepsilon$$

σ : La contrainte normale (en MPa)
ε : L'allongement relatif (sans unité)
E : Le module d'élasticité longitudinale ou module d'Young (en MPa)

7. Application :

Un câble de 20 mm de diamètre et 400 m de longueur, sert à descendre et à remonter une benne pesant 1500 daN. Sachant que le poids spécifique du câble est de 8000 daN/m^3, et que le taux de travail limite est fixé à 15 daN/mm^2. Déterminer la charge utile maximale que l'on peut charger dans la benne et l'allongement maximal du câble (E= 20000 daN/mm^2)

Solution

La section la plus fatiguée est la section supérieure, quand le câble est entièrement déroulé ; sur cette section l'effort normal agissant comprend :

- Le poids du câble : ρSL
- Le poids de la benne : P_0
- La charge utile : P (inconnue)

Le cable subit donc un effort de traction égal à :

N = $\rho SL + P_0 + P$

Pour que le câble résiste en toute sécurité il faut que :

$$\frac{N}{S} \le R_P \Rightarrow \frac{\rho SL + P_0 + P}{S} \le R_P$$
$$\Rightarrow P \le (R_P - \rho L)S - P_0$$

$S = \dfrac{\pi d^2}{4} = 514$ mm^2; $R_P = 15$ daN/mm^2 ; $\rho = 8000$ daN/m^3= 8.10^{-6} daN/mm^3; P_0= 1500 daN;
L= 400 m = 400.10^3 mm.

D'où: $P \leq 2200$ daN

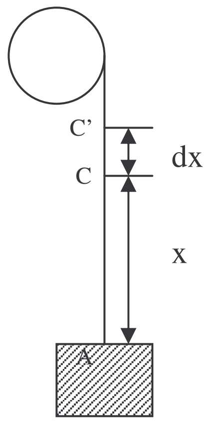
Allongement maxi du câble complètement déroulé :

L'effort normal n'est pas plus constant puisqu'il est fonction du poids du câble.
En effet, en un point C situé à une distance x de la benne on a :

$N = P_0 + P + \rho S x$

Une longueur élémentaire dx de l'élément cc' va s'allonger de Δdx

Loi de Hooke



$$\Delta dx = \frac{Ndx}{ES}$$

$$\Delta dx = \frac{P + P_0}{ES}.dx + \frac{\rho}{E} x dx$$

L'allongement total du câble sera égal à la somme des allongements Δdx de tous les éléments dx compris entre A et B.

$$\Delta L = \int_0^L \Delta dx$$

$$\Delta L = \frac{P + P_0}{ES} \int_0^L dx + \frac{\rho}{E} \int_0^L dx = \frac{P + P_0}{ES} L + \frac{\rho L^2}{2E}$$

ΔL = 288 mm

L. DOUADJI
Faculty of Mechanical Engineering & Process Engineering
Department of Materials Science