SÉRIE DE TD N°1 DE PHYS. 3

Exercice 1 Utilisation des nombres complexes au superposition de mouvements.

Soit les trois mouvements sinusoïdaux suivants ayant la même pulsation Ω:

$$X_1(t) = a_1 \cos(\Omega t + \Phi_1) \quad , \quad X_2(t) = a_2 \cos(\Omega t + \Phi_2) \quad , \quad X_3(t) = a_3 \cos(\Omega t + \Phi_3).$$

1. En utilisant la représentation complexe montrer que la superposition $X_1(t) + X_2(t) + X_3(t)$ est de la forme $A\cos(\Omega t + \Phi)$.

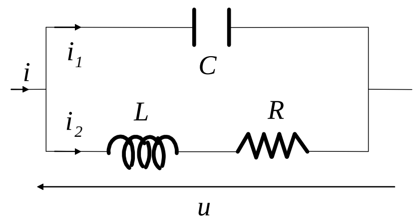
2. Déduire l'amplitude A et la phase Φ de la superposition.

3. *Application*: Trouver la superposition des mouvements suivants:

$$X_1(t) = 3\cos\Omega t \quad , \quad X_2(t) = 4\sin\Omega t \quad , \quad X_3(t) = 2\cos(\Omega t + 30°).$$

Exercice 2 Utilisation des nombres complexes en électricité.

Soit le circuit ci-contre dans lequel $i(t) = I_0 \cos\omega t$.



1. Trouver les courants complexes $\underline{i}_1$ et $\underline{i}_2$ en fonction de $\underline{u}$.

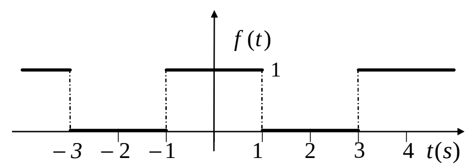
2. Déduire l'impédance complexe $\underline{\mathcal{Z}} = \underline{u}/\underline{i}$ du circuit.

3. Trouver la relation entre L, C, ω pour que le module de l'impédance complexe $\underline{\mathcal{Z}}$ soit indépendant de R.

4. Trouver dans ce cas la valeur de R pour laquelle $\underline{\mathcal{Z}}$ devient réelle.

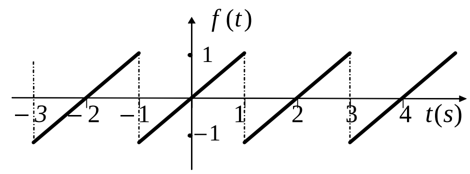
Exercice 3 Décomposition en série de Fourier.

Trouver la série de Fourier associée à chacune des deux fonctions périodiques ci-contre.



1) Fonction en créneaux réguliers.

2) Fonction en dents de scie à flanc vertical.



Tracer les spectres respectifs des deux fonctions.

(*Le spectre sera ici le graphe des a_n et b_n en fonction de $n\omega$. Parfois il est défini comme étant le graphe de $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.*)

Exercice résolu*

Soit la superposition suivante de n grandeurs sinusoïdales:

$$X(t) = a\cos\omega t + a\cos(\omega t + \phi) + a\cos(\omega t + 2\phi) + ... + a\cos(\omega t + (n-1)\phi).$$

1. *En utilisant la représentation complexe trouver l'amplitude complexe $\underline{A}$ de la superposition.*

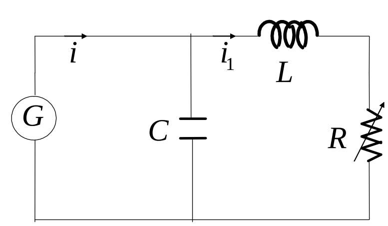
2. *Déduire l'amplitude A et la phase ϕ de la superposition.*

3. *Ecrire l'expression finale réelle de $X(t)$.*

4. *Que devient $X(t)$ quand $\phi \longrightarrow 0$.*

Exercice résolu**

Soit le circuit ci-contre dans lequel G est un générateur de courant sinusoïdale $i(t) = I_0 \sin\omega t$.



1. *En utilisant la loi des mailles, trouver le courant complexe $\underline{i}_1$. Déduire son amplitude complexe $\underline{I}_1$.*

2. *Montrer que la tension complexe $\underline{V} = R\underline{I}_1$ devient indépendante de R pour une certaine valeur ω_0 de ω.*

CORRIGÉS.

Pour plus d'exercices résolus, aller sur **http://sites.google.com/site/exerev**

Exercice *:

Pour trouver l'amplitude de la superposition, utilisons la représentation complexe:

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}(t) = a\cos\omega t + ... + a\cos(\omega t + (n-1)\phi) \;\to\; \underline{\mathrm{X}}(t) &= ae^{j\omega t} + ae^{j(\omega t+\phi)} + ae^{j(\omega t+2\phi)} + ... + ae^{j(\omega t+(n-1)\phi)} \\
&= a\left[1 + e^{j\phi} + e^{j2\phi} + ... + e^{j(n-1)\phi}\right] e^{j\omega t} \\
&= a\left[\frac{e^{jn\phi}-1}{e^{j\phi}-1}\right] e^{j\omega t} \quad \text{(Série géométrique de raison } e^{j\phi}) \\
&= a\left[\frac{e^{jn\frac{\phi}{2}}-e^{-jn\frac{\phi}{2}}}{e^{j\frac{\phi}{2}}-e^{-j\frac{\phi}{2}}}\right] . \frac{e^{jn\frac{\phi}{2}}}{e^{j\frac{\phi}{2}}} . e^{j\omega t} \\
&= a\left[\frac{\sin n\frac{\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}}\right] e^{j(n-1)\frac{\phi}{2}} e^{j\omega t}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{X}(t) = a\frac{\sin n\frac{\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}} \cos[\omega t + (n-1)\tfrac{\phi}{2}] \quad \leftarrow \underline{\mathrm{X}}(t) = a\,\frac{\sin n\frac{\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}} . e^{j[\omega t+(n-1)\frac{\phi}{2}]}$$

1. L'amplitude complexe est donc $\underline{A} = a\dfrac{\sin n\frac{\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}} . e^{j(n-1)\frac{\phi}{2}}$.

2. L'amplitude est $A = |\underline{A}| = a\dfrac{\sin n\frac{\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}}$. Sa phase est $\Phi = (n-1)\frac{\phi}{2}$.

3. L'expression réelle de $\underline{\mathrm{X}}(t)$ est $\mathrm{X}(t) = a\dfrac{\sin n\frac{\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}} \cos[\omega t + (n-1)\frac{\phi}{2}]$.

4. À l'aide du théorème de L'Hôpital on trouve $\lim\limits_{\phi\to 0} a\dfrac{\sin n\frac{\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}} = \lim\limits_{\phi\to 0} a\dfrac{(\sin n\frac{\phi}{2})'}{(\sin\frac{\phi}{2})'} = \lim\limits_{\phi\to 0} a\dfrac{\frac{n}{2}\cos n\frac{\phi}{2}}{\frac{1}{2}\cos\frac{\phi}{2}} = an.$

D'où, $\lim\limits_{\phi\to 0}\mathrm{X}(t) = \lim\limits_{\phi\to 0} a\dfrac{\sin n\frac{\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}} \cos[\omega t + (n-1)\frac{\phi}{2}] = na\cos\omega t$.

Exercice **:

1. Utilisons la représentation complexe comme suit:

$$i(t) = I_0\sin\omega t \longrightarrow \underline{i}(t) = I_0 e^{j\omega t}.$$

$$i_1(t) = I_1\sin(\omega t+\phi_1) \longrightarrow \underline{i}_1(t) = I_1 e^{j(\omega t+\phi_1)} = I_1 e^{j\phi_1} e^{j\omega t} = \underline{I}_1 e^{j\omega t}.$$

Utilisons la loi des mailles avec cette notation complexe pour trouver $\underline{i}_1$en fonction de $\underline{i}$.

$$\mathrm{L}\frac{\mathrm{d}\underline{i}_1}{\mathrm{d}t} + \mathrm{R}\underline{i}_1 - \frac{1}{\mathrm{C}}\int(\underline{i}-\underline{i}_1)\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow j\mathrm{L}\omega\underline{i}_1 + \mathrm{R}\underline{i}_1 - \frac{1}{j\mathrm{C}\omega}(\underline{i} - \underline{i}_1) = 0$$

$$\Longrightarrow \underline{i}_1 = \frac{1}{j\mathrm{C}\omega}\frac{\underline{i}}{j\mathrm{L}\omega+\mathrm{R}+\frac{1}{j\mathrm{C}\omega}}$$

$$\Longrightarrow \underline{i}_1 = \frac{\underline{i}}{1-\mathrm{LC}\omega^2+j\mathrm{RC}\omega}.$$

$$\Longrightarrow \underline{i}_1 = \frac{I_0}{1-\mathrm{LC}\omega^2+j\mathrm{RC}\omega}e^{j\omega t}.$$

L'amplitude complexe de $\underline{i}_1$ est donc $\underline{I}_1 = \dfrac{I_0}{1-\mathrm{LC}\omega^2+j\mathrm{RC}\omega}$.

2. Pour que $\underline{V} = \mathrm{R}\underline{I}_1$ soit indépendante de R il faut que $\dfrac{\partial\underline{V}}{\partial\mathrm{R}} = 0 \Longrightarrow \dfrac{\partial}{\partial\mathrm{R}}\left(\dfrac{\mathrm{R}I_0}{1-\mathrm{LC}\omega^2+j\mathrm{RC}\omega}\right) = 0$

$$\Longrightarrow \frac{I_0(1-\mathrm{LC}\omega^2)}{\left(1-\mathrm{LC}\omega^2+j\mathrm{RC}\omega\right)^2} = 0 \Longrightarrow 1-\mathrm{LC}\omega^2 = 0 \Longrightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{LC}}}.}$$

$\underline{\text{Corrigé de la série N}^\circ\text{1 de Phys. 3}}$

Exercice 1

1. La superposition est: $X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)$. Pour trouver la pulsation de ce mouvement, utilisons la représentation complexe:

$X_1(t) = a_1\cos(\Omega t + \Phi_1) \longrightarrow \underline{X}_1(t) = a_1 e^{j(\Omega t+\Phi_1)}$.

$X_2(t) = a_2\cos(\Omega t + \Phi_2) \longrightarrow \underline{X}_2(t) = a_2 e^{j(\Omega t+\Phi_2)}$.

$X_3(t) = a_3\cos(\Omega t + \Phi_3) \longrightarrow \underline{X}_3(t) = a_3 e^{j(\Omega t+\Phi_3)}$.

$\underline{X}_1(t) + \underline{X}_2(t) + \underline{X}_3(t) = a_1 e^{j(\Omega t+\Phi_1)} + a_2 e^{j(\Omega t+\Phi_2)} + a_3 e^{j(\Omega t+\Phi_3)} = (a_1 e^{j\Phi_1} + a_2 e^{j\Phi_2} + a_3 e^{j\Phi_3})e^{j\Omega t}$.

Puisque $a_1 e^{j\Phi_1} + a_2 e^{j\Phi_2} + a_3 e^{j\Phi_3}$ est un nombre complexe constant, il est de la forme $Ae^{j\Phi}$.

Donc, $\underline{X}_1(t) + \underline{X}_2(t) + \underline{X}_3(t) = Ae^{j\Phi}e^{j\Omega t} = Ae^{j(\Omega t+\Phi)}$.

En revenant à la représentation réelle:

$\underline{X}_1(t) + \underline{X}_2(t) + \underline{X}_3(t) = Ae^{j(\Omega t+\Phi)} \longrightarrow X_1(t) + X_2(t) + X_3(t) = A\cos(\Omega t+\Phi)$.

La pulsation du mouvement résultant est Ω.

2. L'amplitude A est le module du nombre complexe:

$$\begin{aligned} A &= \left|\underline{X}_1(t) + \underline{X}_2(t) + \underline{X}_3(t)\right| = \sqrt{(a_1 e^{j\Phi_1} + a_2 e^{j\Phi_2} + a_3 e^{j\Phi_3})(a_1 e^{-j\Phi_1} + a_2 e^{-j\Phi_2} + a_3 e^{-j\Phi_3})} \\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2\cos(\Phi_1-\Phi_2) + 2a_1a_3\cos(\Phi_1-\Phi_3) + 2a_2a_3\cos(\Phi_2-\Phi_3)}. \end{aligned}$$

Puisque

$\underline{X}_1(t) + \underline{X}_2(t) + \underline{X}_3(t) = a_1\cos\Phi_1 + a_2\cos\Phi_2 + a_3\cos\Phi_3 + j(a_1\sin\Phi_1 + a_2\sin\Phi_2 + a_3\sin\Phi_3)$,

la phase Φ du mouvement est donnée par:

$\tan\Phi = \frac{\mathrm{Im}[\underline{X}_1(t) + \underline{X}_2(t) + \underline{X}_3(t)]}{\mathrm{Re}[\underline{X}_1(t) + \underline{X}_2(t) + \underline{X}_3(t)]} = \frac{a_1\sin\Phi_1 + a_2\sin\Phi_2 + a_3\sin\Phi_3}{a_1\cos\Phi_1 + a_2\cos\Phi_2 + a_3\cos\Phi_3}$.

3. *Application*:

$\underline{X}_1(t) + \underline{X}_2(t) + \underline{X}_3(t) = 3\cos\Omega t + 4\cos(\Omega t - 90^\circ) + 2\cos(\Omega t + 30^\circ) = A\cos(\Omega t + \Phi)$.

D'après la question (**2**) $A = \sqrt{9 + 16 + 4 + 24\cos(90^\circ) + 12\cos(30^\circ) + 16\cos(120^\circ)} \approx 5{,}6$.

$\tan\Phi = \frac{3\sin 0 + 4\sin(-90^\circ) + 2\sin 30^\circ}{3\cos 0 + 4\cos(-90^\circ) + 2\cos 30^\circ} = -0{,}63 \Longrightarrow \Phi \approx -32{,}2^\circ$.

Exercice 2

1. Utilisons la représentation complexe suivante:

$$i(t) = I_0\cos\omega t \longrightarrow \underline{i}(t) = I_0 e^{j\omega t},$$
$$i_1(t) = I_1\cos(\omega t + \phi_1) \longrightarrow \underline{i}_1(t) = I_1 e^{j(\omega t+\phi_1)} = \underline{I}_1 e^{j\omega t},$$
$$i_2(t) = I_2\cos(\omega t + \phi_2) \longrightarrow \underline{i}_2(t) = I_2 e^{j(\omega t+\phi_2)} = \underline{I}_2 e^{j\omega t}.$$

Nous avons: $\begin{cases} \underline{u} = \underline{u}_C \\ \underline{u} = \underline{u}_L + \underline{u}_R \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \underline{u} = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int \underline{i}_1 \mathrm{dt} = \dfrac{1}{jC\omega}\underline{i}_1 \\ \underline{u} = L\dfrac{\mathrm{d}\underline{i}_2}{\mathrm{dt}} + R\underline{i}_2 = (jL\omega + R)\,\underline{i}_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \underline{i}_1 = jC\omega\underline{u} \\ \underline{i}_2 = \dfrac{\underline{u}}{jL\omega + R} \end{cases}$

2. L'impédance complexe du circuit est donc

$$\underline{\mathcal{Z}} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}_1 + \underline{i}_2} = \frac{\underline{u}}{jC\omega\underline{u} + \dfrac{\underline{u}}{jL\omega + R}} = \frac{1}{jC\omega + \dfrac{1}{jL\omega + R}} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

Son module est $\left|\underline{\mathcal{Z}}\right| = \dfrac{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}}$.

• **Deuxième méthode de calcul de l'impédance**: Directement en remarquant les différents branchements:

$$\underline{\mathcal{Z}}_C//(\underline{\mathcal{Z}}_L+\underline{\mathcal{Z}}_R) \Rightarrow \underline{\mathcal{Z}} = \frac{\underline{\mathcal{Z}}_C.(\underline{\mathcal{Z}}_L+\underline{\mathcal{Z}}_R)}{\underline{\mathcal{Z}}_C+(\underline{\mathcal{Z}}_L+\underline{\mathcal{Z}}_R)} = \frac{\frac{1}{j\mathrm{C}\omega}.(j\mathrm{L}\omega+\mathrm{R})}{\frac{1}{j\mathrm{C}\omega}+(j\mathrm{L}\omega+\mathrm{R})} = \frac{\mathrm{R}+j\mathrm{L}\omega}{1-\mathrm{LC}\omega^2+j\mathrm{RC}\omega}.$$

3. Pour que $|\underline{\mathcal{Z}}|$ soit indépendant de R il faut que $\frac{\partial|\underline{\mathcal{Z}}|}{\partial\mathrm{R}}=0$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{\mathrm{R}^2+\mathrm{L}^2\omega^2}\sqrt{\left(1-\mathrm{LC}\omega^2\right)^2+\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\omega^2}} - \frac{\mathrm{RC}^2\omega^2\sqrt{\mathrm{R}^2+\mathrm{L}^2\omega^2}}{\left[\left(1-\mathrm{LC}\omega^2\right)^2+\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\omega^2\right]^{3/2}} = 0 \Longrightarrow \boxed{\mathrm{LC}\omega^2=\tfrac{1}{2}.}$$

4. $\underline{\mathcal{Z}} = \dfrac{\mathrm{R}+j\mathrm{L}\omega}{1-\mathrm{LC}\omega^2+j\mathrm{RC}\omega} = \dfrac{(\mathrm{R}+j\mathrm{L}\omega)\left[1-\mathrm{LC}\omega^2-j\mathrm{RC}\omega\right]}{\left(1-\mathrm{LC}\omega^2\right)^2+\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\omega^2}.$ Pour que $\underline{\mathcal{Z}}$ soit réelle il faut que

$\mathrm{Im}(\underline{\mathcal{Z}}) = 0 \Longrightarrow (1-\mathrm{LC}\omega^2)\mathrm{L}-\mathrm{R}^2\mathrm{C}=0.$ Puisque $\omega^2 = \dfrac{1}{2\mathrm{LC}}$, on trouve $\mathrm{R}=\sqrt{\dfrac{\mathrm{L}}{2\mathrm{C}}}.$

Exercice 3

1. La série de Fourier de la fonction est : (Sa période est T = 4s).

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\tfrac{2\pi n}{T}t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\tfrac{2\pi n}{T}t.$$

$$a_0 = \tfrac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{4}\left(\int_{-1}^{1} 1.\mathrm{d}t + \int_{1}^{3} 0.\mathrm{d}t\right) = \tfrac{1}{2}.$$

$$a_n = \tfrac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\cos\tfrac{2\pi n}{T}t\,\mathrm{d}t$$

$$= \tfrac{2}{4}\left(\int_{-1}^{1} 1.\cos\tfrac{2\pi n}{4}t\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{3} 0.\cos\tfrac{2\pi n}{T}t\,\mathrm{d}t\right) = \tfrac{2}{n\pi}\sin\tfrac{n\pi}{2}.$$

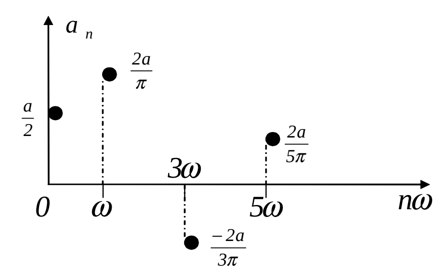
$$= \left(0 \text{ si } n \text{ est paire donc } a_n = \tfrac{2}{(2k+1)\pi}\sin\tfrac{(2k+1)\pi}{2} = \tfrac{2.(-1)^k}{(2k+1)\pi} :\ k=0{,}1{,}2{,}...\right)$$

$b_n = 0$, (Car $f(t)$ est une fonction paire.)

Donc, $f(t) = \tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{2}{n\pi}\sin\tfrac{n\pi}{2}\cos\tfrac{\pi n t}{2}.$

$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{\pi}\left[\cos\omega t - \frac{\cos 3\omega t}{3} + \frac{\cos 5\omega t}{5} + ...\right].$$

Le spectre de $f(t)$ est le graphe des a_n en fonction de $n\omega$:



2. La série de Fourier de la fonction est : (Sa période est T = 2s)

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\tfrac{2\pi n}{T}t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\tfrac{2\pi n}{T}t.$$

$a_0 = a_n = 0.$ (Car $f(t)$ est une fonction impaire.)

$$b_n = \tfrac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\sin\tfrac{2\pi n}{T}t\,\mathrm{d}t = \tfrac{2}{2}\int_{-1}^{1} t\sin\pi n t\,\mathrm{d}t$$

$$= -\tfrac{2}{n\pi}\cos n\pi = -\tfrac{2.(-1)^n}{n\pi}.$$

Donc, $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{2.(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\pi n t.$

Le spectre de $f(t)$ est le graphe des b_n en fonction de $n\omega$: