Chapitre IV :

Analyse des contraintes

L. DOUADJI
Faculty of Mechanical Engineering & Process Engineering
Department of Materials Science

Sommaire

1. Définitions

2. Eléments de réduction des forces extérieures dans une section droite.

3. Contraintes sur plans inclinés de traction et compression simples.

4. Cercle de MOHR.

5. Traction ou compression suivant deux directions perpendiculaires

6. Application

1. Définitions

Soit un solide quelconque en équilibre sous l'action de forces extérieures. Imaginons une surface S (un plan par exemple) qui décompose le corps en deux parties (A) et (B).

La partie (B) est équilibrée sous l'action des forces extérieures qui lui sont directement appliquées et des réactions exercées par la partie (A) sur la partie (B). Sur chaque élément de surface ds de séparation S, (A) exerce sur (B) une force df.ds appliqué au centre de l'élément ds.

On appelle contrainte, la force interne exercée à travers une surface élémentaire du matériau ds sur la matière située d'un côté de cette surface sur la matière situé de l'autre côté, cette force étant rapportée à l'unité de surface.

Contrainte moyenne : $\vec{P} = d\vec{f} / ds$

Contrainte : $\vec{\sigma} = \lim\limits_{ds \to 0} (d\vec{f} / ds)$

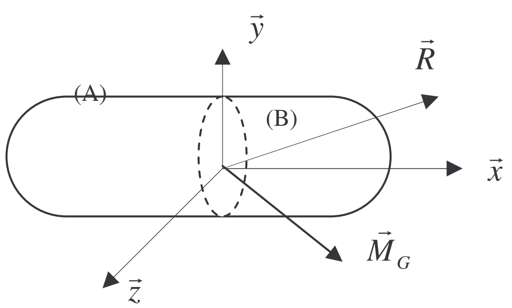
Le vecteur $\vec{\sigma}$, dont la direction est quelconque dans l'espace, peut être décomposé :

En sa projection sur la normale à l'élément dS, cette projection est la contrainte normale $\vec{\sigma}_n$ (traction et compression).

En sa projection sur le plan tangent à l'élément dS, qui est appelée contrainte tangentielle $\vec{\tau}$.

2. Eléments de réduction des forces extérieures dans une section droite :

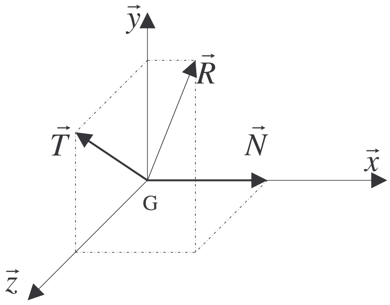
Soit un solide quelconque en équilibre sous l'action de forces extérieures.



Sur une section droite, les forces extérieures se réduisent en une résultante et un moment résultant en G (centre de gravité de la section).

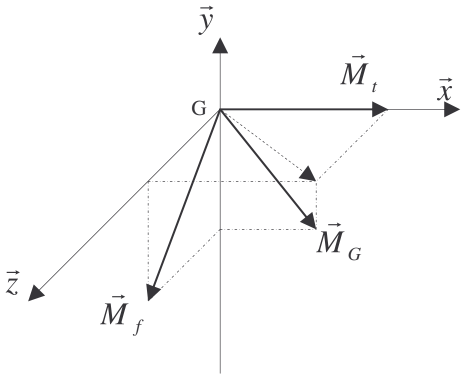
La résultante $\vec{R}$ se décompose en une résultante normale $\vec{N}$ et une résultante tangentielle $\vec{T}$ à la section droite.

$$\vec{R} : \begin{cases} \vec{N} \text{ : Résultante normale.} \\ \vec{T} \text{ : Résultante tangentielle.} \end{cases}$$



Le moment résultant $\vec{M}_G$ se décompose en moment normal à la section $\vec{M}_t$, et un moment sur la section $\vec{M}_f$.

$$\vec{M}_G : \begin{cases} \vec{M}_t \text{ : Moment de torsion} \\ \vec{M}_f \text{ : Moment de flexion} \end{cases}$$

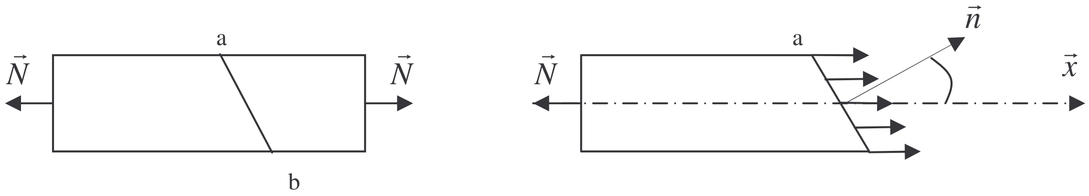


$N \neq 0$, $T=0$, $M_t=0$, $M_f=0$: Traction et compression pure.
$N \neq 0$, $T \neq 0$, $M_t=0$, $M_f=0$: Traction et compression simple.
$N=0$, $T \neq 0$, $M_t=0$, $M_f=0$: Cisaillement pur.
$N=0$, $T=0$, $M_t \neq 0$, $M_f=0$: Torsion pure.
$N=0$, $T=0$, $M_t=0$, $M_f \neq 0$: Flexion pure.
$N=0$, $T \neq 0$, $M_t=0$, $M_f \neq 0$: Flexion simple.
$N \neq 0$, $T=0$, $M_t=0$, $M_f \neq 0$: Flexion composée.

L. DOUADJI
Faculty of Mechanical Engineering & Process Engineering
Department of Materials Science

3. Contraintes sur plans inclinés de traction et compression simples

En étudiant les contraintes dans une poutre soumise à une traction axiale N, nous allons considérer le cas où la section transversale est inclinée sur l'axe.



Toutes les fibres longitudinales ayant le même allongement, la partie gauche de la poutre est en équilibre sous l'action de $\vec{N}$ et des forces réparties sur la section ab.

Soit S l'aire de section normale à l'axe $\vec{x}$ de la poutre et φ l'angle que fait cet axe avec la normale $\vec{n}$ à la section ab ; l'aire de la section est égale à :

$$S/\cos\varphi$$

La répartition uniforme des forces sur la section ab permette d'obtenir la contrainte $\vec{\sigma}$ sur cette section :

$$\vec{\sigma} = \frac{\vec{N}}{S/\cos\varphi} = \vec{\sigma}_x \cos\varphi$$

Avec $\vec{\sigma}_x = \frac{\vec{N}}{S}$ représente la contrainte sur la section normale à l'axe de la poutre.

$\vec{\sigma}$ et $\vec{\sigma}_x$ ont la même direction, mais $|\vec{\sigma}| \leq |\vec{\sigma}_x|$.

On dissocie la contrainte totale $\vec{\sigma}$ en deux composantes :

Contrainte normale : $\sigma_n = \sigma.\cos\varphi = \sigma_x.\cos^2\varphi$

Contrainte tangentielle : $\tau = \sigma.\sin\varphi = \sigma_x.\frac{\sin 2\varphi}{2}$

La contrainte normale maximale agit sur les sections normales à l'axe $\vec{x}$ de la poutre :

$(\sigma_n)_{\max} = \sigma_x$ à $\varphi = 0$

La contrainte tangentielle maximale agit sur les sections inclinées de 45° sur l'axe de la poutre :

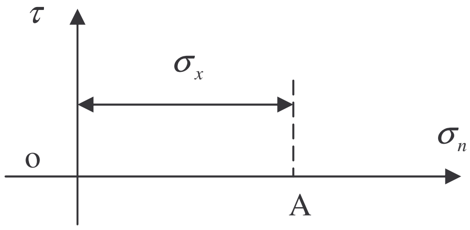
$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\sigma_x \text{ à } \varphi = \pi/4$$

Ces formules calculées pour une poutre en traction, peuvent aussi être utilisées en compression.

Par convention, la contrainte de traction (suivant l'axe $\vec{x}$) est supposée positive, la compression sens opposé à l'axe $\vec{x}$) négative.

4. Cercle de MOHR.

Le cercle de MOHR est une représentation graphique des contraintes normales et tangentielles ; pour cela on considère un système de coordonnées rectangulaires d'origine o.



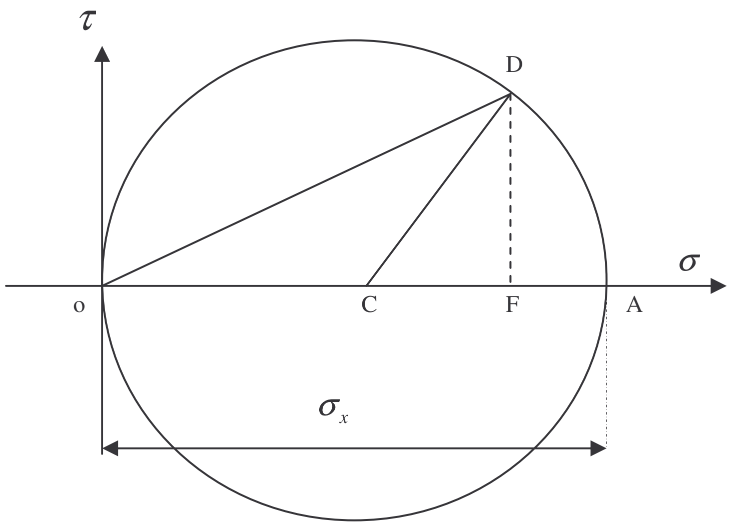
Nous choisissons une échelle sur les contraintes et portons les composantes normales sur l'axe horizontal et les composantes tangentielles sur l'axe vertical.

Soit A, d'abscisse égale σ_x et d'ordonnée τ représente la contrainte agissant sur le plan $\varphi = 0$

Soit o représente le plan $\varphi = \frac{\pi}{2}$, pour lequel deux composantes de la contrainte disparaissent.

L. DOUADJI
Faculty of Mechanical Engineering & Process Engineering
Department of Materials Science

Traçant le cercle de diamètre oA on connaître aisément que les composantes de la contrainte, pour toute section ab et pour un plan φ pris arbitrairement, peuvent être représentées par les coordonnées d'un point du cercle.



$$\sigma_n = \overline{OF} = \overline{OC} + \overline{CF} = \frac{1}{2}\sigma_x + \frac{1}{2}\sigma_x \cos 2\varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi$$

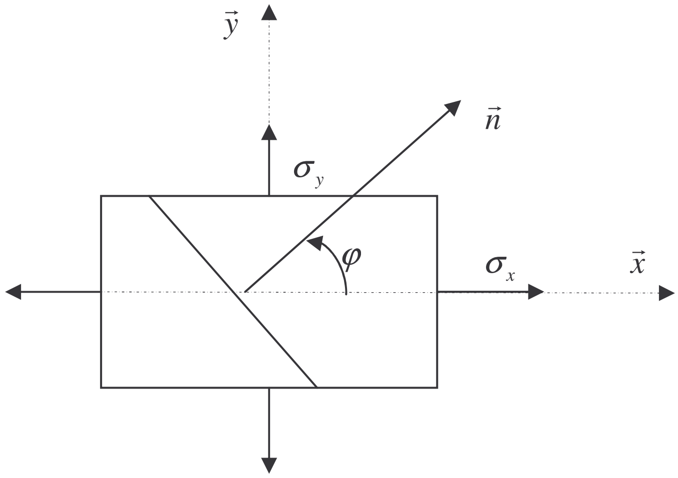
$$\tau = \overline{FD} = \overline{CD}.\sin 2\varphi = \frac{1}{2}\sigma_x \sin 2\varphi$$

Le cercle appelé cercle des contraintes ou cercle de MOHR, est aussi utilisé pour résoudre le problème inverse, c'est-à-dire lorsqu'il faut calculer la contrainte de traction σ_x suivant la direction axiale et l'angle φ connaissant les composantes σ_n et τ .

5. Traction ou compression suivant deux directions perpendiculaires

Dans certains cas, le matériau d'une construction est soumis à l'action d'une traction ou d'une compression suivant deux directions perpendiculaires.

Dans le cas général, on considère la contrainte agissant sur une section transversale quelconque ab, perpendiculaire au plan (xy) et dont la normale $\vec{n}$ fait un angle φ avec l'axe $\vec{x}$.



Les composantes normale et tangentielle dues à σ_x sont données par :

$$\sigma'_n = \sigma_x \cos^2 \varphi$$
$$\tau' = \frac{1}{2}\sigma_x \sin 2\varphi$$

Pour calculer les composantes normale et tangentielle dues à σ_y, on remarque que :

L'angle $(\vec{\sigma}_y, \vec{n}) = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$

Le sens positif des angles est le sens trigonométrique.

On remplace donc, σ_x par σ_y et φ par $\dfrac{\pi}{2} - \varphi$ pour avoir :

$$\sigma = \sigma_y . \sin^2 \varphi \ ; \ \tau'' = -\frac{1}{2}\sigma_y . \sin 2\varphi$$

Les contraintes résultantes normale et tangentielle sur un plan incliné, dans le cas d'une traction suivant deux directions perpendiculaires.

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi$$
$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\varphi$$

6. Application

Une tige rectiligne de section rectangulaire s = 100 x 30 mm ^{2} est sollicitée par un effort normal N= 4.10^5 N.

Déterminer les contraintes sur la facette ab par la méthode analytique et par le cercle de Mohr dans le cas suivants :

a/ N est un effort de traction et $\varphi = 60°$.
b/ N est un effort de compression et $\varphi = 120°$

Solution

a/ Cas de traction :

Par la méthode analytique :

$\sigma_x = N / S$

$\sigma = \sigma_x . \cos\varphi \rightarrow \sigma_n = \sigma . \cos\varphi = \sigma_x . \cos^2\varphi$

$\sigma_x = 4.10^5 / 100x30 \rightarrow \sigma_x = 133,33$ N/mm^2

$\sigma_n = \sigma_x . \cos^2\varphi \rightarrow \sigma_n = 33,33$ N/mm^2

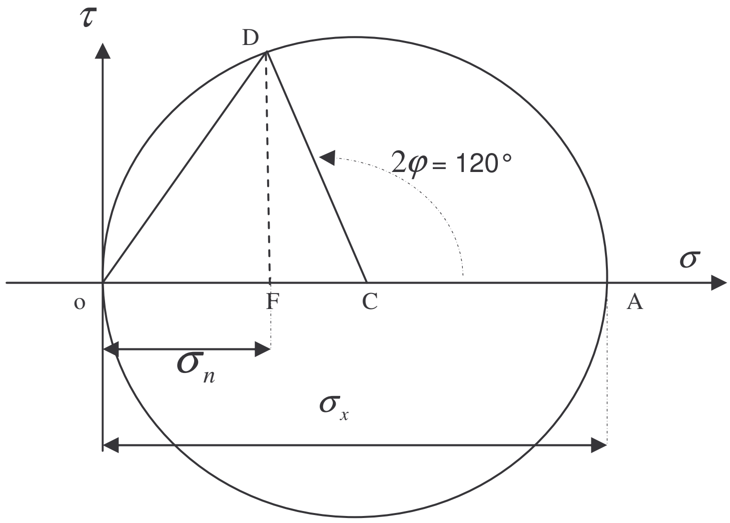
$\tau = \sigma_x \dfrac{\sin 2\varphi}{2} \rightarrow \tau = 57,73$ N/mm^2

Par le cercle de MOHR :

C = $(\dfrac{\sigma_x}{2}, 0)$

R = $\dfrac{\sigma_x}{2}$

$\overline{OF} = \sigma_n$, $\overline{OA} = \sigma_x$ et $2\varphi = 120°$



$\overline{OF} = \overline{OC} - \overline{FC}$

$\sigma_n = \overline{OF} = R - R\cos\beta = R - R\cos(\pi - 2\varphi)$ =R-Rcos60 = 33,33 N/mm^2

L. DOUADJI
Faculty of Mechanical Engineering & Process Engineering
Department of Materials Science

$\tau = \overline{FD} = \overline{CD}\sin\beta = R\sin 60 = \dfrac{\sigma_x}{2}\sin 60$ = 57,73 N/mm^2

b/ <u>Cas de compression</u>

$\sigma_x = -N/S$

$\sigma = \sigma_x.\cos\varphi \rightarrow \sigma_n = \sigma.\cos\varphi = \sigma_x.\cos^2\varphi$

σ_x = - 4.10^5/ 100x30 $\rightarrow \sigma_x$ = -133,33 N/mm^2

C = ($\dfrac{\sigma_x}{2}$, 0)

R = $\dfrac{\sigma_x}{2}$

$\overline{OF} = \sigma_n$, $\overline{OA} = \sigma_x$ et 2φ = 120°

$\overline{OF} = \overline{OC} - \overline{FC} = -R + R\cos 60$

$\tau = R\sin 60$