LM

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

$A \to A$ identité

$A \vee \neg A$ tiers exclus: principe de la démonstration par l'absurde

$\neg\neg A \to A$ double négation.

$((A \to B) \to A) \to A$ loi de pierce.

$\neg(A \wedge \neg A)$ loi de non contradiction.

$\left.\begin{array}{l} \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B \\ \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \end{array}\right\}$ loi de Morgan.

Les axiomes:

$A \to B \equiv \neg B \to \neg A$ contraposition

$(A \to B) \cap A \to B$ Modus Ponens (détachement)

$\left.\begin{array}{l} A, A \to B \vdash B \\ \dfrac{A \to B \quad A}{B} \end{array}\right\}$ de A et de $(A \to B)$ on déduit B.

$(A \to B) \wedge \neg B \to \neg A$ Modus Tollens.

$(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$ Modus Barbara.

$\left.\begin{array}{l} A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{array}\right\}$ distribution

Déduction à la Hilbert:

Appliquer la règle Modus Ponens $\dfrac{\vdash P \to Q \quad \vdash B}{\vdash Q}$

Si $P \to Q$ est un thé. et P un thé.

alors Q est un thé. $\{\neg, \to\}$.

Les axiomes: $\vdash P \to (Q \to P)$; $\vdash (P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$;

La sémantique du Calcul propositionelle : LM

Interprétation d'une proposition A est le fait d'attribuer une valeur de vérité (0 ou 1) aux var. propositionnelles.

Il y a 3 interprétations :

- La prop. prend toujours un "0" : antologie, contradiction, insatisfaisable.
- La prop. prend toujours un "1" : A est une tautologie, valide
- au moins une fois la valeur 1 et au moins une fois la valeur 0 : prop. synthétique, contingente.

ex : $(\neg A \to A) \to A$; $A \vee A \to A$ est une tautologie.

Démonstration syntaxique :

Règle d'affirmation : $\dfrac{\neg A}{\overline{A}}$, $\begin{array}{c} A \vee B \\ \swarrow \quad \searrow \\ A \qquad B \end{array}$, $\begin{array}{c} A \wedge B \\ A \\ B \end{array}$, $\begin{array}{c} A \to B \\ \swarrow \quad \searrow \\ \overline{A} \qquad B \end{array}$,

Règle de réfutation : $\begin{array}{c} \overline{\neg A} \\ A \end{array}$, $\begin{array}{c} \overline{A \vee B} \\ \overline{A} \\ \overline{B} \end{array}$, $\begin{array}{c} \overline{A \wedge B} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \overline{A} \qquad \overline{B} \end{array}$, $\begin{array}{c} \overline{A \to B} \\ A \\ \overline{B} \end{array}$

$\overline{A \wedge B} = \neg A \vee \neg B$, $\overline{A \to B} = \overline{\neg A \vee B} = A \wedge \neg B$.

Règle $\perp$

Pour démontrer une formule, on nie cette formule (F, $\overline{F}$) et on développe un Arbre : tableau de beth. et F est la racine

$F = ((A \to B) \wedge A) \to B$. Modus ponens.

$\overline{F} = \overline{((A \to B) \wedge A) \to B}$

$\downarrow$

$(A \to B) \wedge A$

$\overline{B}$

$\downarrow$

$$\begin{array}{c} A \to B \\ A \\ \swarrow \quad \searrow \\ \overline{A} \qquad B \end{array}$$

absurde.