AN

Résumé : Rm
AN, SI, LM, PS, ASD.

Interpolation :

Soit $y = f(x)$ une fonction dont on ne connait que les valeurs y_i qu'elle prend aux $(n+1)$ points distincts x_i, $i = 0, 1, \dots, n$. On a donc : $f(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Problème : déterminer un polynôme $P_n(x)$ de degré inférieur ou égal à n tel que : $P_n(x_i) = y_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$ de manière à pouvoir estimer les valeurs $f(x)$ au moyen de $P_n(x)$ pour x tel que : $\min(x_i) \leq x \leq \max(x_i)$.

c'est ce qu'on appelle : Interpoler la fonction f par le polynome P_n aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$

P_n : est le polynome d'interpolation de f en $x_0, \dots, x_n$

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ les coefficients d'un tel polynome s'il existe. On a alors :

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n .$$

du fait que $P_n(x_i) = y_i$, les coef. $a_0, \dots, a_n$ verifient le système :

$$\begin{cases} a_0 x_0^n + a_1 x_0^{(n-1)} + \dots + a_n = y_0 \\ a_0 x_1^n + a_1 x_1^{(n-1)} + \dots + a_n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 x_n^n + a_1 x_n^{(n-1)} + \dots + a_n = y_n \end{cases}$$

C'est un système linéaire de déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{(n-1)} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{(n-1)} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{(n-1)} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix}$$

déterminant de Vander Monde

$\Delta \neq 0$ car les x_i sont distincts. d'où le polynome d'interpolation existe et est unique.

AN

On a plusieurs méthodes pour construire le pôlynome d'interpolation:

* Méthode de Lagrange:

Pôlynome de Lagrange au point x_i: $L_i(x)$, $i=0 \ldots n$

$$L_i = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

La formation du pôlynome d'interpolation:

$$P_n(x) = \sum_{n=0}^{n} y_i L_i(x) \quad . \, d^o P_n(x) \leq n$$

$$P_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x_j) = y_j L_j(x_j) = y_j, \, j=0,\ldots,n.$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

$P_n(x)$ est le pôlynome d'interpolation de Lagrange.

Cas particulier:

Pour $n=1$:

$P_1(x) = y_0 \dfrac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1 \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}$ c'est l'équation d'une droite passant par les points (x_0,y_0) et (x_1,y_1).

Pour $n=2$:

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$+ y_2 \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$ c'est l'équation d'une parabole qui passe par les 3 points.

AN

exemple : construire le polynome d'interpolation de Lagrange de la fonction $y = f(x) = \sin \pi(x)$.

Pour : $x_0 = 0$, $x_1 = 1/6$, $x_2 = 1/2$, $n = 2$.

On va chercher un poly. de degré ≤ 2 de la forme.

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$= 0 \frac{(x - 1/6)(x - 1/2)}{(0 - 1/6)(0 - 1/2)} + \frac{1}{2} \frac{(x - 0)(x - 1/2)}{(1/6 - 0)(1/6 - 1/2)} + 1 \frac{(x - 0)(x - 1/6)}{(1/2 - 0)(1/2 - 1/6)}$$

$$P_2(x) = -3x^2 + \frac{7}{2}x.$$

Méthode de Newton :

On doit calculer les différences divisées :

x_i	$f(x_i)$	δ_1	δ_2	—	δ_{n-1}	δ_n
x_0	$f(x_0)$					
x_1	$f(x_1)$	$\delta(x_0, x_1)$	$\delta(x_0, x_1, x_2)$			
x_2	$f(x_2)$	$\delta(x_1, x_2)$				
x_3	$f(x_3)$	$\delta(x_2, x_3)$	$\delta(x_1, x_2, x_3)$		$\delta(x_0, \ldots, x_{n-1})$	$\delta(x_0, \ldots, x_n)$
⋮	⋮	⋮	⋮		$\delta(x_1, \ldots, x_n)$	
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$		$\delta(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$			
x_n	$f(x_n)$	$\delta(x_{n-1}, x_n)$				

$$P_n(x) = \delta(x_0) + \delta(x_0, x_1)(x - x_0) + \delta(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ \ldots + \delta(x_0, \ldots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}).$$

$$\delta(x_i) = f(x_i), \quad \delta(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_i) - f(i+1)}{x_i - x_{i+1}} = \frac{\delta(x_i) - \delta(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}.$$