Chapitre VII:

Flexion

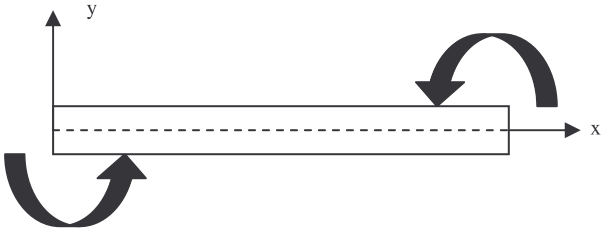
L. DOUADJI
Faculty of Mechanical Engineering & Process Engineering
Department of Materials Science

Sommaire

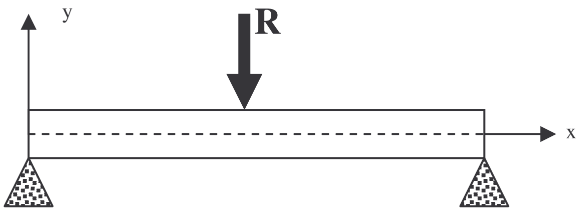
1. Définition:

Une poutre est sollicitée en flexion chaque fois que sa ligne moyenne fléchit. On peut distinguer 3 cas principaux :

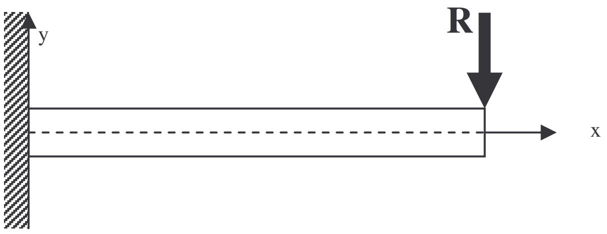
Poutre soumise à des moments :



Poutre sur 2 appuis soumise à des résultantes



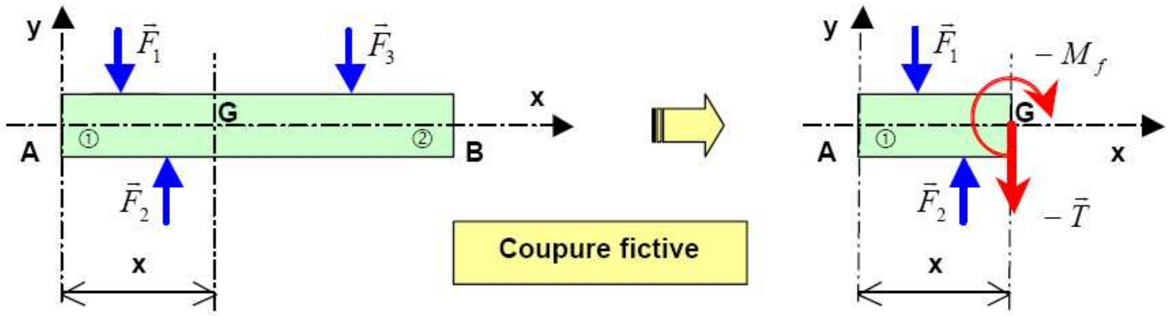
Poutre encastrée soumise à des résultantes



2. Efforts intérieurs

Dans le cas de la flexion, les efforts intérieurs dans n'importe quelle section droite se réduisent à un effort tranchant T (perpendiculaire à la ligne moyenne) et à un moment fléchissant Mf (perpendiculaire à la ligne moyenne et à T).

Pour faire apparaître les efforts intérieurs, on effectue une coupure fictive à la distance x de l'origine A. En isolant le tronçon **1**, on obtient l'effort tranchant T et le moment fléchissant M_f (on obtient en fait respectivement –T et –M_f).



$\vec{T}$ = somme vectorielle de toutes les forces extérieures transversales situées à gauche de la section fictive = $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$

M_f = moment résultant en G de toutes les actions extérieures situées à gauche de la section fictive = $M_G(\vec{F}_1) + M_G(\vec{F}_2)$

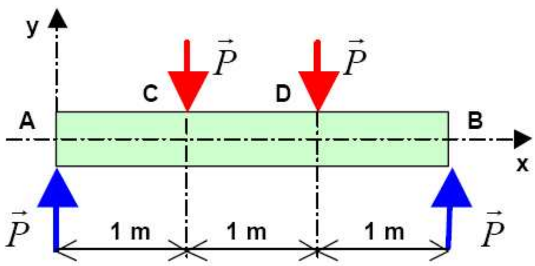
Remarque : le cas $M_f \neq 0$ avec *T=0* correspond à de la flexion pure, alors que le cas $M_f \neq 0$ avec $T \neq 0$ correspond à de la flexion simple.

3. Diagrammes

Les valeurs de l'effort tranchant T et du moment fléchissant M_f varient avec la position x de la coupure fictive. Les diagrammes de t et M_f (graphes mathématiques de type (x, y)) permettent de décrire les variations de ces deux grandeurs et ainsi repérer les maximums à prendre en compte lors des calculs des contraintes.

3.1 Essai de flexion

Un dispositif de mise en charge exerce une poussée de 20 000 N qui se répartit en C et D, alors que le bâti de la machine supporte la poutre en A et B. La symétrie du chargement et des appuis entraîne A = B = C = D = P = 10 000 N, le poids de la poutre étant négligé.



Etude du tronçon AC : section fictive d'abscisse $0 \leq x \leq 1m$

Une seule force à gauche de la section fictive : $\vec{P}$ au point A

Effort tranchant $T_{AC}= P= 10000N$ pour tout $0 \leq x \leq 1m$
Moment fléchissant $M_{fAC} = -P.x = -10000.x$ N.m

Etude du tronçon CD : section fictive d'abscisse $1 \leq x \leq 2m$

Deux forces à gauche de la section fictive : $\vec{P}$ au point A, et -$\vec{P}$ au point C

Effort tranchant $T_{CD}= P - P= 0$ N pour tout $1 \leq x \leq 2m$
Moment fléchissant $M_{fCD} = -P.x+P(x-1)=-10000$ *Nm*

Remarque : sur ce tronçon $M_f \neq 0$ et $T=0$, on est dans un cas de flexion pure.

Etude du tronçon DB : section fictive d'abscisse $2 \leq x \leq 3m$

Trois forces à gauche de la section fictive : $\vec{P}$ *en A, et* -$\vec{P}$ aux points C et D

Effort tranchant $T_{DB} = P- P- P = -10000$ *N* pour tout $2 \leq x \leq 3m$
Moment fléchissant $M_{fDB} = - P. x + P(x-1) + P(x-2) = P(x-3) = 10000(x-3)$ *Nm*

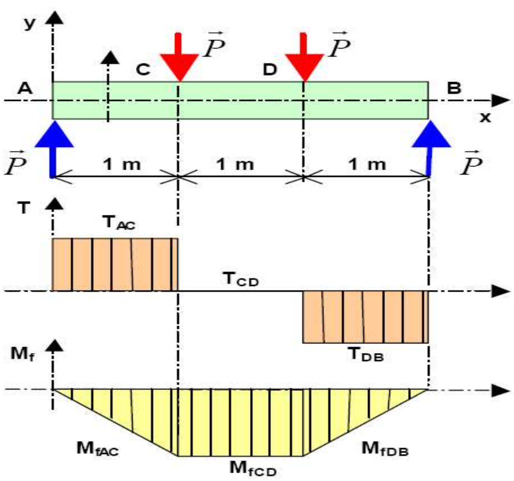
Diagrammes : rassemblons les trois résultats précédents sur un même graphe :

Diagramme des efforts tranchants :

$T_{AC} = 10000$ *N pour* $0 \leq x \leq 1m$
$T_{CD}= 0$ *N pour* $1 \leq x \leq 2m$
$T_{DB}= 10000$ *N pour* $2 \leq x \leq 3m$

Diagramme des moments fléchissants :

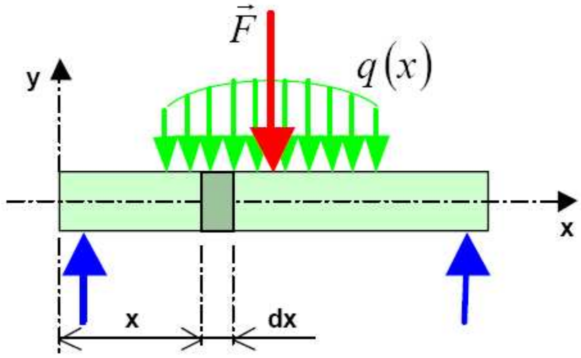
$M_{fAC} = 10\,000\ x$ *Nm pour* $0 \leq x \leq 1m$
$M_{fCD} =10000$ *Nm pour* $1 \leq x \leq 2m$
$M_{fDB} = 10000\ (x-3)$ *Nm pour* $2 \leq x \leq 3m$

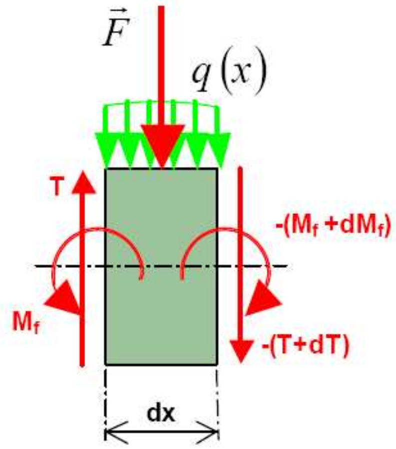


3.2. Correspondance entre les diagrammes

L'étude de l'équilibre du tronçon de largeur dX appartenant à la poutre, compte tenu des charges indiquées, donne :

$$\frac{dT}{dx} = -q(x) \quad \text{et} \quad \frac{dM_f}{dx} = -T$$

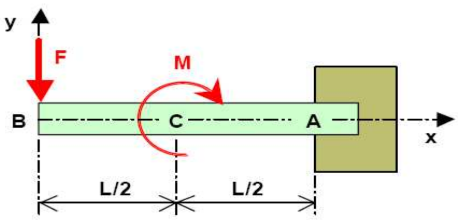


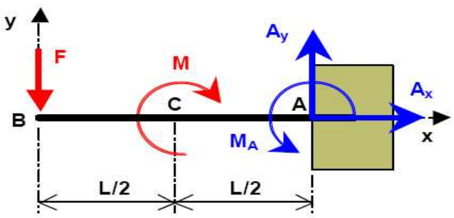


3.3 Poutre encastrée

On considère une poutre encastrée de longueur *L = 2m* soumise à un effort concentré *F= 1000N* (vers le bas) au point B et à un couple pur *M=1000* Nm (sens antitrigonométrique) autour du point C.

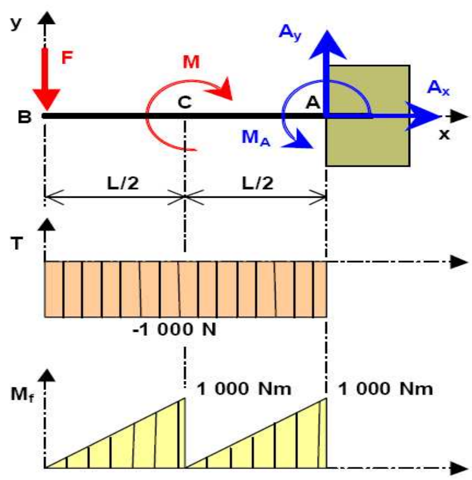
Actions exercées par l'encastrement sur la poutre : le **Principe Fondamental de la Statique** donne :





$$\vec{F} + \vec{A} = \vec{0}$$
$$M_A(\vec{F}) + M_A(\vec{A}) - M + M_A = 0$$

$$\begin{cases} A_x = 0 \\ A_y - 1000 = 0 \\ 2 \times 1000 - M + M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = 1000\ N \\ M_A = -1000\ Nm \end{cases}$$



Etude du tronçon BC : $0 \le x \le 1m$

Effort tranchant : $T_{BC} = -F = -1000N$
Moment fléchissant : $M_{fBC} = F.\ x = 1000.x\ Nm$

Etude du tronçon CA : $0 \le x \le 2m$

Effort tranchant : $T_{CA} = -F = -1000\ N$
Moment fléchissant : $M_{fCA} = F.\ x - M = 1000\ (x-1)\ Nm$

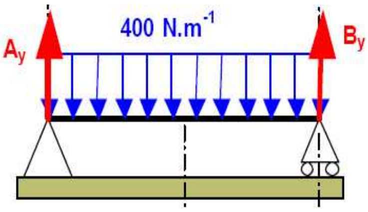
L. DOUADJI
Faculty of Mechanical Engineering & Process Engineering
Department of Materials Science

4. Charges réparties

Les charges réparties ont pour origine les actions de pesanteur et des actions de contact diverses (vent, neige, pression d'un fluide…). Elles peuvent être uniformes ou variables.

4.1 Charge répartie uniforme

Traitons ce cas à partir d'un exemple. Considérons une poutre (longueur L = 4 m) réalisée à partir d'un profilé IPE dont le poids est de 40daN par mètre ($\vec{q} = -400\vec{y}$ ou $q = 400$ Nm^{-1}).



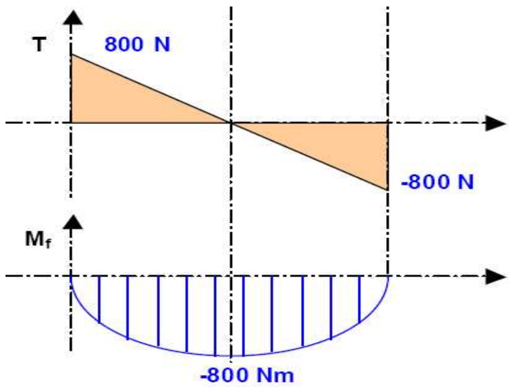
Actions aux appuis en A et B

Le Principe Fondamental de la Statique donne :
$\vec{A} + \vec{B} + \vec{q} = \vec{0}$

En projection sur y : $A + B - q\,L = 0$ avec $A_y = B_y$ du fait de la symétrie.

D'où $A_y = B_y = q.L/2 = (400x4)/2 = 800N$

Effort tranchant :



$T_{AB} = A_y - q.x = 400(2\text{-}x)$

Moment fléchissant :

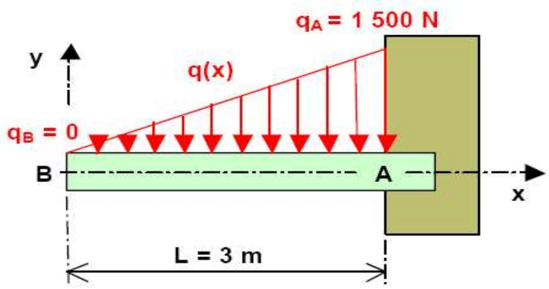
$$M_{fAB} = -A_y x + qx.\frac{x}{2} = 200x(x-4)$$

Remarque : calcul de l'extrémum

$$\frac{dM_{fAB}}{dx} = \frac{d[200x(x-4)]}{dx} = 400(x-2)$$

S'annule pour 400 (x - 2) = 0 soit x = 2 et la valeur maxi du moment fléchissant est alors (pour x = 2) :
$M_{fAB\ maxi}$ = 200 x 2(2-4) = - 800 Nm.

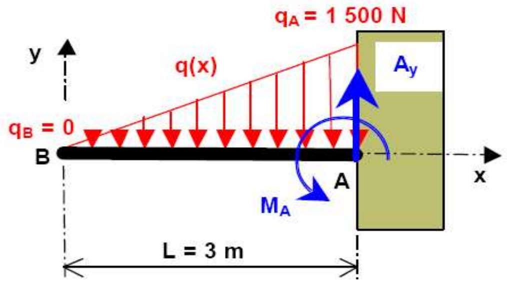
4.2. Charge répartie linéairement variable



Nous allons également traiter ce cas à partir d'un exemple. Prenons le cas d'une poutre (longueur L= 3m) encastrée en A, supportant la charge linéairement croissante q(x) de la figure.

Charge répartie : $\frac{q(x)}{x} = \frac{q_A}{L}$

D'où $q(x) = \frac{q_A}{L} x = \frac{1500}{3} x = 500x$ Nm



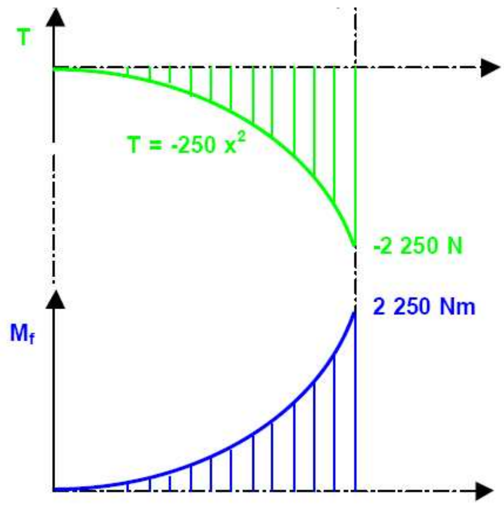
Action à l'encastrement : Principe Fondamental de la Statique :

$$\begin{cases} \vec{R} + \vec{A} = \vec{0} \\ M_A(\vec{R}) + M_A(\vec{A}) + M_A = 0 \end{cases}$$

Où $\vec{R}$ est la résultante de la charge répartie q(x) sur toute la longueur L :

R = 1500x 3/2 = 2250 N (aire du triangle)

Cette résultante s'applique au «centre de gravité du triangle», c'est-à-dire à la distance L/3 du point A.



On a donc : $\begin{cases} A_y - R = 0 \\ R.\frac{L}{3} + M_A = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} A_y - R = 2250N \\ M_A = -R.\frac{L}{3} = -2250.\frac{3}{3} = -2250Nm \end{cases}$$

Effort tranchant :

$T_{BA} = -\frac{500x.x}{2} = -250.x^2 N$ (Triangle)

Moment fléchissant :

$$M_{fBA} = -\frac{500.x.x}{2}.\frac{x}{3} = -\frac{250}{3}x^3$$

L. DOUADJI
Faculty of Mechanical Engineering & Process Engineering
Department of Materials Science

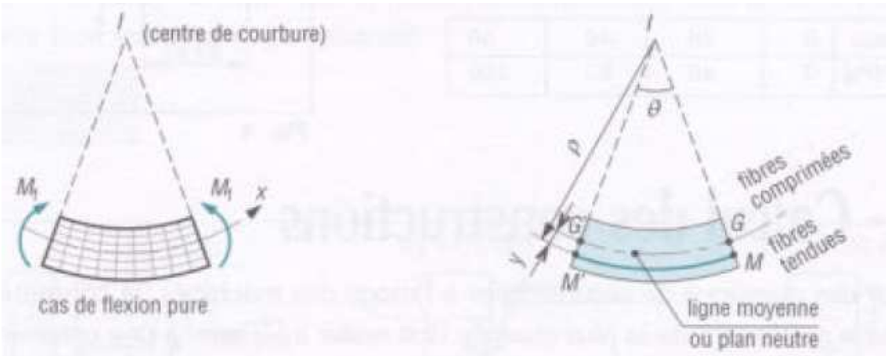
5. Contraintes de flexion

En flexion, les contraintes normales σ sont généralement prépondérantes devant les contraintes de cisaillement τ .

5.1 Contraintes normales en flexion

Les contraintes normales résultent du moment fléchissant M_f (les efforts tranchants n'ont aucun effet sur leur valeur).

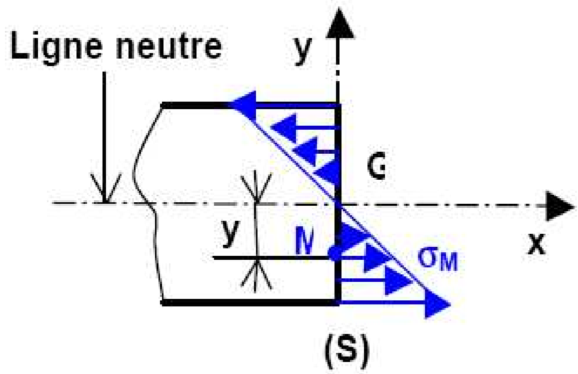
Dans le cas de flexion pure ($M_f \neq 0$ avec *T=0*), les poutres se déforment suivant des arcs de cercles.



La ligne moyenne GG' ne subit ni allongement ni raccourcissement (contraintes σ nulles). Pour la figure proposée, les fibres situées au-dessus de la ligne neutre sont comprimées et supportent des contraintes de compression ; celles situées au-dessous (MM') sont tendues et supportent des contraintes de traction.

En exprimant l'allongement de la fibre MM', en utilisant la loi de Hooke ($\sigma = \varepsilon . E$) et en faisant intervenir le moment fléchissant Mf, on montre la relation suivante :

$$\sigma_M = \frac{M_f}{I_z} y$$



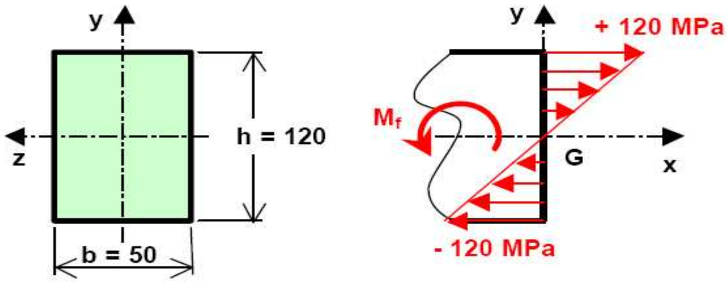
Avec :

σ_M : La contrainte normale en M (en MPa)
M_f : Le moment fléchissant dans la section droite S (en Nmm)
y : La distance du point M par rapport à la ligne neutre (en mm)
I_z : Le moment quadratique de la section droite S par rapport à l'axe (G, z) (en mm^4)

L. DOUADJI
Faculty of Mechanical Engineering & Process Engineering
Department of Materials Science

Exemple :

Déterminons les contraintes normales dans une poutre rectangulaire (50mm / 120mm), soumise à un moment fléchissant de 14.4 kNm constant sur toute sa longueur.



Moment quadratique :

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{50.120^3}{12} = 72.10^6 \text{ mm}^4$$

Contraintes :

$$\sigma_M = \frac{M_f}{I_z} y = \frac{14400000}{72.10^6} y = 2y \text{ MPa}$$

Les contraintes augmentent donc linéairement avec la distance à la ligne neutre.

5.2. Condition de résistance

Pour des questions de sécurité liées à l'usage des machines, la contrainte normale σ_{Maxi} dans la section droite la plus chargée doit rester inférieure à une contrainte limite admissible liée au matériau et fixée par le constructeur ou par des normes : R_{pe}.

Dans le cas précis de la flexion, il faut donc procéder ainsi :

Commencer par déterminer la section la plus chargée (en général celle où le moment fléchissant est maximum) ;

Puis vérifier que la contrainte maximale dans cette section est inférieure à la contrainte admissible R_{pe} imposée par le constructeur.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{f\,\max i}}{(I_z / V)} \leq R_{pe}$$

Avec

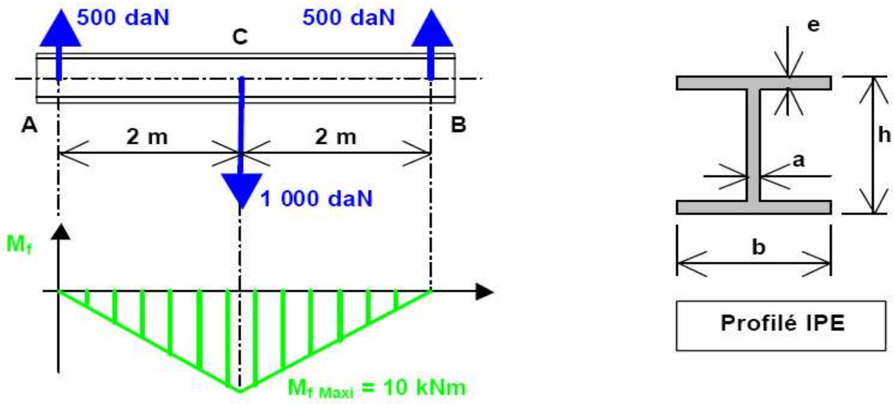
$V = y_{Maxi}$

I_z / V : Le module de flexion

R_{pe} : La résistance pratique (rappel: $R_{pe} = R_e / s$ avec R_e la limite élastique et s le coefficient d sécurité adopté)

5.3. Exercice d'application

Une poutre de pont roulant (profilé IPE) est soumise aux charges indiquées sur la figure ci-dessous (cas le plus défavorables). Le moment fléchissant maximum est obtenu au milieu de la poutre et a pour valeur 110kNm (vous auriez pu le déterminer facilement, mais là n'est pas le problème). Si on impose une contrainte admissible de 100 MPa, déterminons le profilé pouvant convenir pour construire l'appareil.



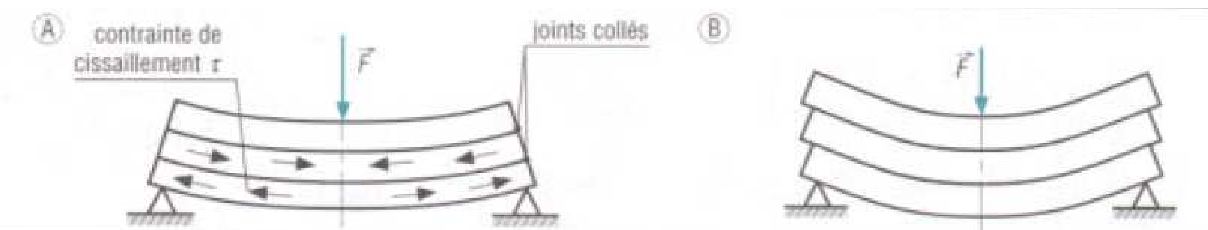
On doit avoir :

$$\sigma_{\max i} = \frac{M_{f\,\max i}}{I_z / V} = \frac{10000000}{I_z / V} \leq 100 MPa$$

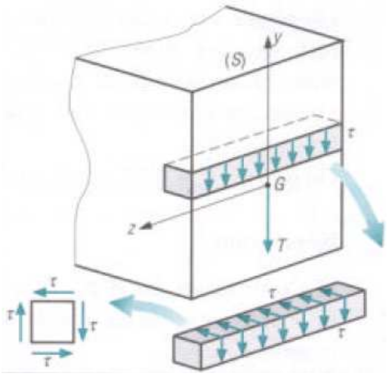
D'où $I_z / V \geq 100000 mm^3 = 100 cm^3$

6. Contraintes de cisaillement en flexion

6.1. Mise en évidence



Pour l'exemple ci-dessus, les contraintes de cisaillement τ qui s'exercent dans les joints collés assurent le maintien (évitent le glissement) entre les poutres respectives et limitent ainsi les déformations.

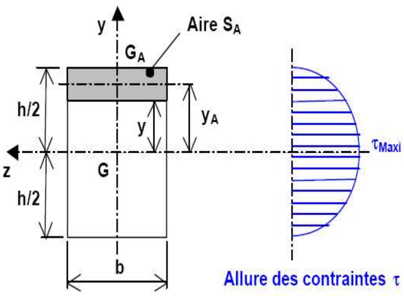


La figure ci-contre donne la distribution des contraintes de cisaillement dans une section droite (S) supportant un effort tranchant T.

Si les contraintes τ conservent une valeur constante suivant l'axe z, en revanche elles varient suivant y, avec un maximum près du plan neutre (**inverse des contraintes normales** σ).

6.2. Cas des poutres rectangulaires

Dans ce cas, la contrainte de cisaillement τ , à la distance y du plan neutre, est donnée par : $\tau = \dfrac{TQ}{I_z b}$ avec $Q = y_A S_A = \dfrac{b}{2}(\dfrac{h^2}{4} - y^2)$



τ la contrainte de cisaillement à la distance y (MPa)
Q le moment statique de l'aire hachurée S_A (mm^3)
T l'effort tranchant (N)
I_z le moment quadratique de la section S par rapport à (G, z) (mm^4)

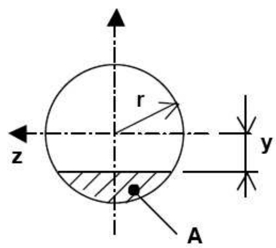
Remarque : la contrainte est maximale au niveau du plan neutre (y =0) :

$$\tau_{max} = \frac{3T}{2S} = \frac{Th^2}{8I_z}$$

Elle est de 50% plus grande que la contrainte moyenne de cisaillement T/S définie dans le cas du cisaillement pur.

6.3. Cas des poutres circulaires

Section circulaire pleine : $S = \pi r^2$



$$Q = \frac{2}{3}(r^2 - y^2)^{3/2}$$

$$\tau = \left(\frac{4T}{3\pi r^2}\right)\sqrt{r^2 - y^2}$$

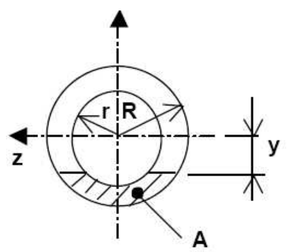
$$\tau_{max} = \frac{4T}{3S}$$

Section circulaire creuse : $S = \pi(R^2 - r^2)$

$$Q = \frac{2}{3}(r^3 - y^3)$$

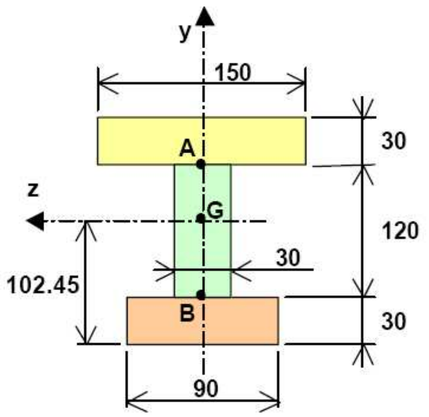
$$\tau_{\max} = \frac{4T}{3S}\left(\frac{R^2 + Rr + r^2}{R^2 + r^2}\right)$$

Pour un tube mince $\tau_{\max} = \dfrac{2T}{S}$



6.4. Exercice d'application

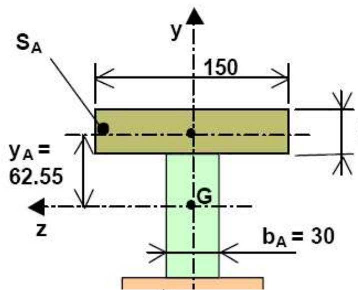
Un profilé est réalisé à partir de trois plats rectangulaires d'épaisseur 30 mm, collés ensembles en A et B. Si l'effort tranchant est T = 13.5 kN, déterminer les contraintes de cisaillement dans les joints collés. On donne I_z = 43,7.10^6 mm^4.



Contraintes en A :
y_A = distance entre (G, z) et le barycentre de la surface S_A.

$Q_A = S_A\, y_A = (150 \text{ x } 30) \text{ x } 62.55 = 281475\ mm^3$

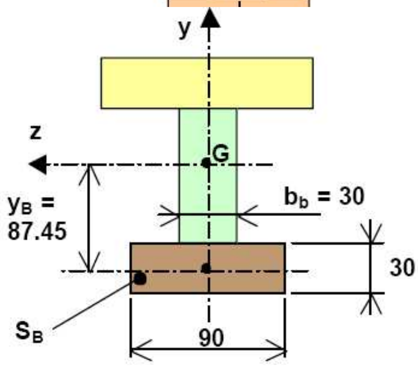
$$\tau_A = \frac{TQ_A}{I_z b_A} = \frac{13500 \times 281475}{43{,}7.10^6 \times 30} = 2.9MPa$$



Contraintes en B :
y_B = distance entre (G, z) et le barycentre de la surface S_B.

$Q_B = S_B\, y_B = (90 \text{ x } 30) \text{ x } 87.45 = 236115\ mm^3$

$$\tau_A = \frac{TQ_B}{I_z b_B} = \frac{13500 \times 236115}{43{,}7.10^6 \times 30} = 2.4MPa$$



Remarque $I_z = I_{z1} + I_{z2} + I_{z3}$

$$I_{z1} = \frac{150 \times 30^3}{12} + (150 \times 30) \times 62.55^2 = 17{,}95.10^6\, mm^4$$

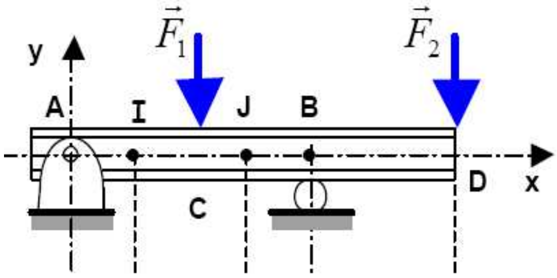
$$I_{z2} = \frac{90 \times 30^3}{12} + (90 \times 30) \times 87.45^2 = 20{,}85.10^6\, mm^4$$

$$I_{z3} = \frac{30 \times 90^3}{12} + (30 \times 90) \times 12.545^2 = 4{,}88.10^6\, mm^4$$

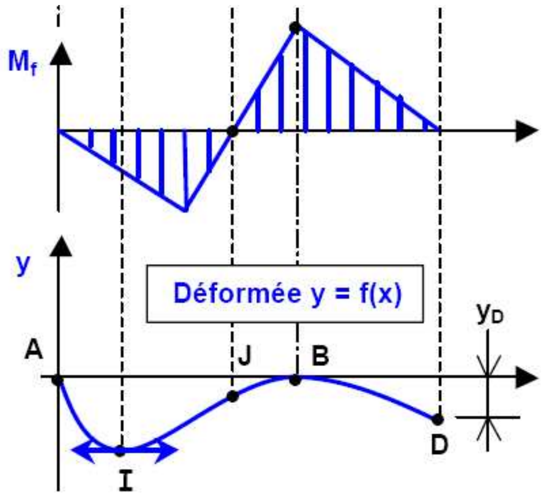
7. Déformations en flexion

Dans ce qui précède, on s'est intéressé au poutres fléchies et à leur dimensionnement d'un point de vue de résistance sous charge. Nous allons voir à présent l'aspect déformation. En particulier, la détermination de la flèche maximale (et de sa valeur admissible) est l'un des éléments fondamentaux de la conception des poutres.

7.1. Notion de déformée



Pour la poutre ci-contre, la ligne moyenne AICJBD a pour direction l'axe des x avant déformation et la courbe y = f(x) après déformation. Cette courbe est appelée déformée.
y = f(x) est l'équation mathématique de la déformée dans le système d'axes (x, y).



Conditions aux limites :

Les conditions $y_A = 0$, $y_B = 0$ et $y'_I = 0$, appelées conditions aux limites, sont des éléments connus de la déformée. Ces éléments sont imposés par les appuis A et B ou par la forme de la déformée.

Flèches :
La déformée présente des valeurs maximales en I (entre A et B) et à l'extrémité D. Pour ces points particuliers, la déformation est souvent appelée flèche (f) :
$f_I = y_I$ et $f_D = y_D$

7.2. Méthode par intégration

7.2.1. Principe

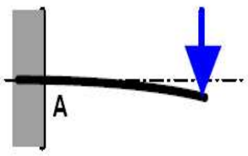
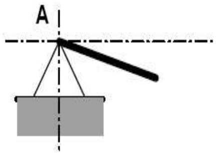
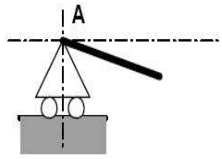
Connaissant l'équation des moments fléchissants M_f en fonction de x (position le long de la poutre), la pente y' et la déformée y sont obtenues par intégrations successives à partir de :

$$M_f = -EIy''$$

L. DOUADJI
Faculty of Mechanical Engineering & Process Engineering
Department of Materials Science

avec
M_f le moment fléchissant (équation en x)
E le module d'élasticité longitudinale (MPa).
$I = I_z$ le moment quadratique de la section par rapport à l'axe (G, z) (mm^4)
y'' la dérivée seconde de la déformée y.

Remarque :
Les constantes d'intégration successives sont calculées à partir des conditions aux limites imposées par la position et la nature des appuis, ou encore par la forme générale de la déformée.

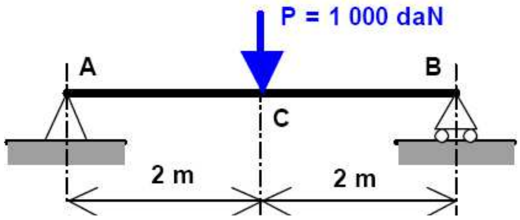
Exemples usuels de conditions aux limites		
Encastrement	Articulation	Appui simple
		
$y'_A = 0$ $y_A = 0$	$y_A = 0$	$y_A = 0$

7.2.2. Exercice d'application

Considérons la poutre ci-contre, de longueur L = 4 m, soumise à une charge ponctuelle en son milieu.

L'étude statique permet de déterminer les actions des appuis sur la poutre :

$$A = B = \frac{P}{2} = 500 daN$$



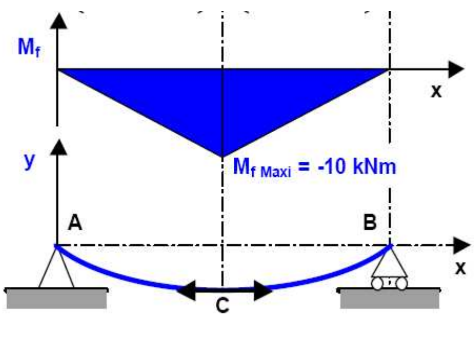
Moments fléchissant :

Pour $0 \leq x \leq 2m$

$$Mf_{AC} = -\frac{P}{2}x = -500x$$

Pour $2 \leq x \leq 4m$

$$Mf_{AC} = -\frac{P}{2}x + P(x - \frac{L}{2}) = 500(x-4)$$



Equation de la déformée :

$$Mf_{AC} = -EIy_{AC}''$$

On donc : $-EIy_{AC}'' = -\frac{P}{2}x$

L. DOUADJI
Faculty of Mechanical Engineering & Process Engineering
Department of Materials Science

ou encore $EIy_{AC}'' = \frac{P}{2}x$

La première intégration donne : $EIy_{AC}' = \frac{P}{4}x^2 + C_1$ (1)

La seconde intégration donne : $EIy_{AC} = \frac{P}{12}x^3 + C_1 x + C_2$ (2)

Conditions aux limites :

On a y = 0 au point A (x = 0) : l'équation (2) donne : $C_2 = 0$

et $y'_C = 0$ au point C (x = L/2) : l'équation (1) donne : $C_1 = -\frac{P \times (L/2)^2}{4} = -\frac{PL^2}{16}$

Finalement

$y_{AC}' = \frac{P}{4EI}(x^2 - \frac{L^2}{4})$ et $y_{AC} = \frac{P}{4EI}(\frac{x^3}{3} - \frac{L^2}{4}x)$

Flèche **:** la flèche maximale est obtenue pour x = L/2 : $f_{\max} = y_C = -\frac{PL^3}{48EI}$