SÉRIE DE TD N° **2** DE PHYS. 3

Exercice 1 Equation du mouvement à partir de l'équation de conservation.

Deux ressorts de même raideur k ont une longueur à vide $l_0 < d_0$. Une masse m reliée à leurs extrémités peut coulisser sans frottement sur l'axe *X'OX*.

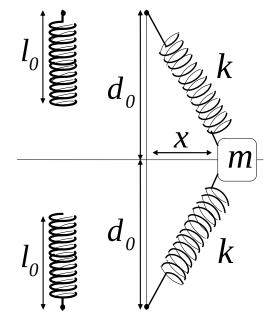
1. Trouver l'énergie potentielle U du système en fonction de x.

2. Montrer que pour les petits mouvements $(x \ll d_0)$, U s'écrit: $U= k[(1-l_0/d_0)x^2+(d_0-l_0)^2]$.

3. Trouver l'énergie cinétique T puis l'énergie totale $E=T+U$ du système.

4. Trouver l'équation du mouvement à l'aide de l'équation de conservation.

5. Quelle est la pulsation propre ω_0 du système ?



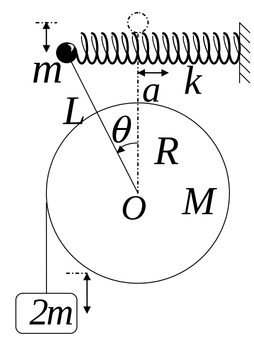
Exercice 2 Condition d'équilibre. Condition d'oscillation.

Un disque de rayon R et de masse M peut tourner sans frottement autour de son axe horizontal en O et porte à sa périphérie une masse $2m$.
Une tige de longueur L et de masse négligeable est soudée en O et porte une masse m. À l'équilibre la tige était verticale (*représentée en pointillé*) et le ressort était allongé d'une distance a.

1. Trouver l'énergie potentielle U du système en fonction de θ. $(\theta \ll 1)$.

2. Déduire à l'aide de la condition d'équilibre l'allongement a à l'équilibre.

3. Pour quelle condition le système aura un mouvement d'oscillation?



Exercice résolu* **Équation de Conservation.**

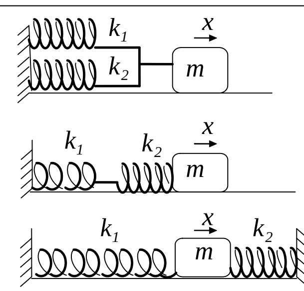
On considère les trois systèmes mécaniques de la figure ci-contre. La masse m peut coulisser sans frottement sur le plan horizontal.

1. *Trouver le ressort équivalent pour chaque système.*

2. *Déduire l'énergie potentielle U pour chaque système.*

3. *Trouver l'énergie mécanique E pour chaque système.*

4. *À l'aide de l'équation de conservation, trouver l'équation du mouvement et la pulsation propre de chaque système.*



Exercice résolu ** **Équilibre Stable et Instable.**

Un disque de rayon R et de masse M est mobile sans frottement autour de son axe horizontal en O. La masse m_1 est fixée au disque, m_2 est suspendue à un fil inextensible et non glissant enroulé autour du disque.

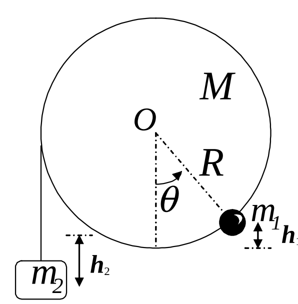
1. *Trouver l'énergie potentielle U du système en fonction de θ.*

2. *Déduire les positions d'équilibre éventuel du système.*

3. *Quelles sont parmi ces positions celles qui sont stables.*

4. *Trouver l'énergie cinétique T du système.*

5. *À l'aide de l'équation de conservation, trouver l'équation du mouvement et la pulsation propre du système pour $\theta \ll 1$.*



Rappels: Le moment d'inertie du disque autour de son axe est $I=\frac{1}{2}MR^2$. $(\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2})$

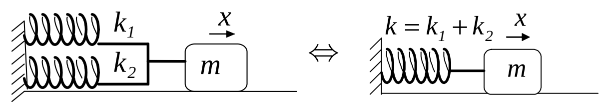
CORRIGÉS.

Pour plus d'exercices résolus, aller sur **http://sites.google.com/site/exerev/**

Exercice *:

Système (i):

1. Les deux ressorts étant en parallèle, le ressort équivalent est de raideur: $k{=}k_1{+}k_2$.

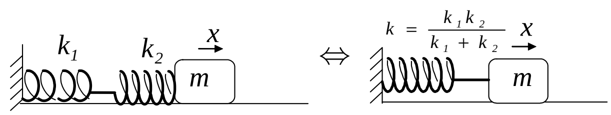


2. $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(k_1+k_2)x^2$. **3**. $E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(k_1+k_2)x^2$.

4. $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \implies m\dot{x}\ddot{x} + (k_1+k_2)x\dot{x} = 0 \implies \ddot{x} + \frac{k_1+k_2}{m}x = 0$. $(\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}.)$

Système (ii):

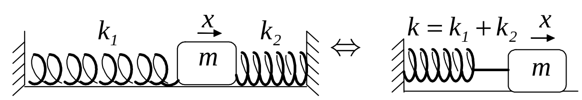
1. Les deux ressorts étant en série, le ressort équivalent est de raideur: $k{=}\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$.



2. $U{=}\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}x^2$. **3**. $E{=}\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}x^2$. **4**. $\ddot{x} + \frac{k_1k_2}{m(k_1+k_2)}x{=}0$. $(\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1k_2}{m(k_1+k_2)}}.)$

Système (iii):

1. Lorsque l'un des ressorts s'allonge d'une distance x l'autre se comprime d'une distance x et lorsque l'un tire l'autre pousse dans le même sens: ils agissent comme s'ils étaient en parallèle. Le ressort équivalent est donc: $k{=}k_1{+}k_2$.



2. $U{=}\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(k_1+k_2)x^2$. **3**. $E{=}\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(k_1+k_2)x^2$. **4**. $\ddot{x} + \frac{k_1+k_2}{m}x{=}\ 0$. $(\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}.)$

Exercice **:

1. Comme le fil est inextensible et ne glisse pas sur le disque, lorsque le disque tourne d'un angle θ, m_2 descend d'une distance $h_2 = R\theta$ alors que m_1 monte d'une distance $h_1 = R - R\cos\theta$.
L'énergie potentielle est donc: $U = U_{m1} + U_{m2} = m_1gh_1 - m_2gh_2 = m_1g(R - R\cos\theta) - m_2gR\theta$.

2. Les positions d'équilibres sont données par : $\frac{\partial U}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow m_1gR\sin\theta - m_2gR = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{m_2}{m_1}$.
Comme $\sin\theta$ doit toujours être $\leqslant 1$, on déduit qu'aucun équilibre n'est possible si $m_2 > m_1$.

- Si $m_2{=}m_1$, on aura $\sin\theta = 1 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$.
- Si $m_2{<}m_1$, on aura $\sin\theta < 1 \Longrightarrow 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

3. Pour $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$, nous avons $\frac{\partial^2U}{\partial\theta^2} = m_1gR\cos\theta{>}0$: Entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ l'équilibre est donc **stable**.
Pour $\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi$, nous avons $\frac{\partial^2U}{\partial\theta^2} = m_1gR\cos\theta{<}0$: Entre $\frac{\pi}{2}$ et π l'équilibre est donc **instable**.

4. $T = T_{m_1} + T_{m_2} + T_M = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I\,\dot{\theta}^2$
$= \frac{1}{2}m_1(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m_2(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}MR^2\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M)R^2\,\dot{\theta}^2$.

5. $E{=}T{+}U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M)R^2\,\dot{\theta}^2 + m_1g(R - R\cos\theta) - m_2gR\theta$.
Pour $\theta \ll 1$: $\cos\theta \approx 1{-}\frac{\theta^2}{2}$. D'où: $E \approx \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M)R^2\,\dot{\theta}^2 + m_1gR\frac{\theta^2}{2} - m_2gR\theta$.

$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \Longrightarrow (m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M)R^2\ddot{\theta} + m_1gR\theta - m_2gR = 0$

$\Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{2m_1g}{(2m_1+2m_2+M)R}\theta = m_2gR$. $(\omega_0 = \sqrt{\frac{2m_1g}{(2m_1+2m_2+M)R}}.)$

Corrigé de la série N°2 de Phys. 3

Exercice 1

1. L'énergie potentielle est:
$U{=}U_{ressort1}{+}U_{ressort2} = 2U_{ressort1} = 2.\frac{1}{2}k(l{-}l_0)^2 = k(\sqrt{d_0^2+x^2}{-}l_0)^2$.

2. Pour de faibles écartements ($\frac{x}{d_0} \ll 1$), nous avons $U = k(d_0\sqrt{1+\frac{x^2}{d_0^2}}-l_0)^2 \approx k(d_0(1+\frac{x^2}{2d_0^2})-l_0)^2$
$U \approx k(d_0-l_0+\frac{x^2}{2d_0})^2 = k(d_0-l_0)^2\left[1+\frac{x^2}{2d_0(d_0-l_0)}\right]^2 \approx k\left(d_0-l_0\right)^2(1+\frac{x^2}{d_0(d_0-l_0)}) = k\left[(1-\frac{l_0}{d_0})x^2+(d_0-l_0)^2\right]$.

3. L'énergie mécanique est $E = T+U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + k\left[(1-\frac{l_0}{d_0})x^2+(d_0-l_0)^2\right]$.

4. Cette énergie étant conservée: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x}+2k(1-\frac{l_0}{d_0})x\dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x}+\frac{2k}{m}(1-\frac{l_0}{d_0})x = 0$.

5. Cette équation est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}(1-\frac{l_0}{d_0})}$.

Exercice 2.

1. Comme le fil est inextensible et ne glisse pas sur le disque, la hauteur de descente H de la boite lors d'une rotation θ du disque est $H{=}R\theta$. Nous allons appeler la hauteur de descente de la boule h.
D'autre part pour des écartements faibles $\theta \ll 1$, on peut supposer que le ressort reste horizontal de telle sorte que son allongement est $a{+}L\sin\theta$.

$$\begin{aligned} U = U_{2m}+U_m+U_{ressort} &= -2mgH-mgh+\frac{1}{2}k\left(d\right)^2 \\ &\approx -2mgR\theta-mg(L-L\cos\theta)+\frac{1}{2}k(a+L\sin\theta)^2 \\ &\approx -2mgR\theta - \frac{1}{2}mgL\theta^2+\frac{1}{2}k(a+L\theta)^2. \end{aligned}$$

2. La déformation du ressort à l'équilibre est donnée par la condition d'équilibre en $\theta = 0$:
$\frac{\partial U}{\partial\theta}\Big|_{\theta=0} = 0 \Longrightarrow -2mgR - mgL\theta+kL(a+L\theta)\Big|_{\theta=0} = 0 \Longrightarrow a=\frac{2mgR}{kL}$.

3. La condition d'oscillation est: $\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\Big|_{\theta=0} > 0 \Longrightarrow -mgL+kL^2\Big|_{\theta=0} > 0 \Longrightarrow kL > mg$.