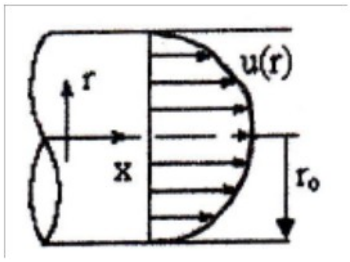
Chapitre III Equations générales régissant l'écoulement d'un fluide parfait incompressible

T.D. N°3

Exercice 1 Un fluide incompressible s'écoule dans une conduite circulaire de rayon r_o (voir figure). Dans une section quelconque le profil de la vitesse est parabolique et donné par l'équation suivante :

$U(r) = \gamma(r_0^2 - r^2)$ avec $\gamma = cte$

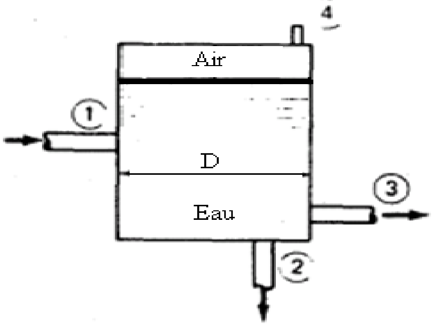
- Donner l'expression du débit volumique.
- Donner l'expression de la vitesse moyenne d'écoulement.



Exercice 2 De l'eau entre dans un réservoir cylindrique à travers la conduite 1 à la vitesse de 7.62 m/s et sort à travers les deux conduites 2 et 3 aux vitesses 3.05 m/s et 3.66 m/s, respectivement, (voir figure). L'air, supposé incompressible, est libre de s'écouler à travers la conduite 4, ouverte à l'atmosphère. Les diamètres intérieurs des conduites sont : D_1=76.2 mm, D_2=50.8mm, D_3= 63.5mm et D_4 = 50.8 mm.

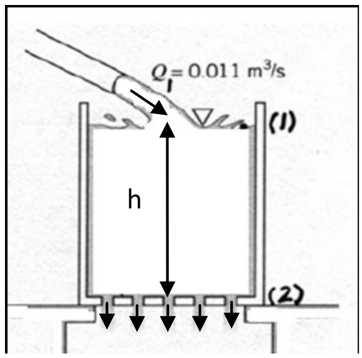
a- Déterminer le sens de l'écoulement et la vitesse de la surface libre de l'eau dans le réservoir de diamètre D=0.61 m.

b- Déduire la vitesse de l'air à travers la conduite 4.



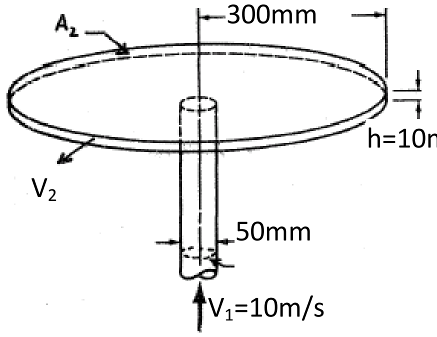
Exercice 3 Un écoulement d'eau de 0.011 m^3/s est déchargé dans un réservoir tel que montré dans la figure ci-contre. Le fond de ce réservoir contient 20 orifices qui laissent s'écouler l'eau vers le bas. Le diamètre de chaque orifice est de 10 mm.

- Déterminer la hauteur h de l'eau accumulée dans le réservoir à laquelle l'équilibre est atteint (régime stationnaire).

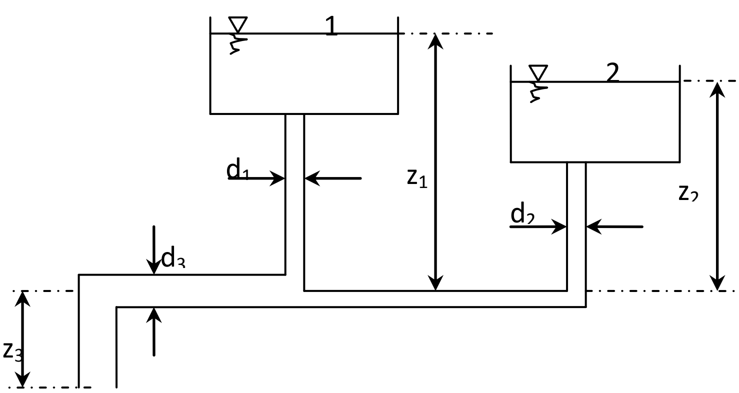


Exercice 4 De l'eau s'écoule dans une conduite de diamètre 50 mm à une vitesse moyenne de V_1 = 10 m/s puis traverse radialement l'espace entre deux disques comme montrés sur la figure ci contre. Les disques sont parallèles et la distance entre eux est h = 10mm.

-Calculer la vitesse moyenne V_2 de l'eau au rayon de 300mm à la sortie de l'espace entre les deux disques.



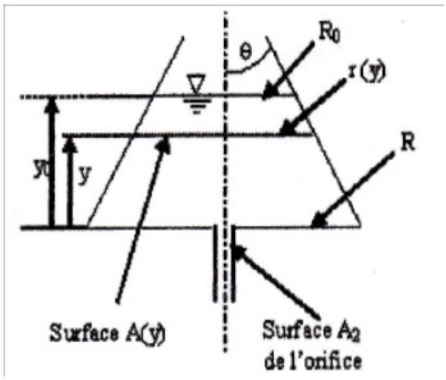
Exercice 5 Deux grands réservoirs 1 et 2 sont remplis d'un même liquide. Les écoulements provenant de ces réservoirs à travers des conduites de diamètres d_1 et d_2 se mélangent dans une conduite commune de diamètre d_3 avant de sortir vers l'air libre. En supposant que la pression du point d'intersection des conduites est la même.



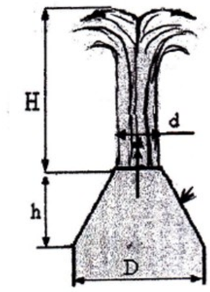
Chapitre III Equations générales régissant l'écoulement d'un fluide parfait incompressible

- Trouver le débit et la vitesse à la sortie en fonction de d_1, d_2, d_3, H_1, H_2 et H_3.

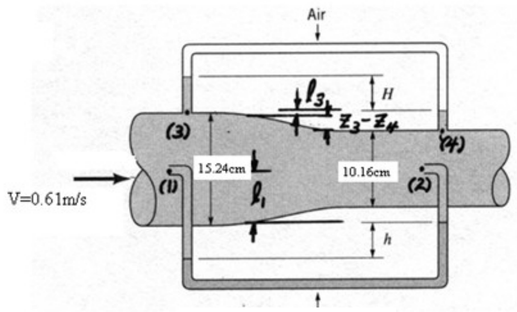
Exercice 6 Trouver l'expression de la durée de vidange complète d'une hauteur quelconque y_0 d'un liquide à l'intérieur d'un cône inversé en fonction de A_2, g, y_0, R et R_0.
A_2 est la section de l'orifice de sortie.
y_0 est la hauteur initiale de la surface libre.
R est le rayon de la surface de la base du cône.
R_o est le rayon de la surface libre initiale à t=0s.
y est la hauteur de la surface libre au temps t.



Exercice 7 Calculer le débit volumique d'un jet d'eau s'élevant verticalement à la hauteur H=8m et sortant d'un convergent dont les diamètres d'entrée et de sortie sont D=50mm et d=10mm.
Déterminer la pression effective à l'entrée du convergent si h=0.5m, voir figure ci-contre.



Exercice 8 Deux tubes de Pitot et deux manomètres pour mesurer la pression statique sont placés à l'entrée et à la sortie d'une contraction de conduite.
Le fluide en écoulement est de l'eau dont la viscosité est supposée négligeable.
- Déterminer la lecture des deux instruments h et H. Expliquer.

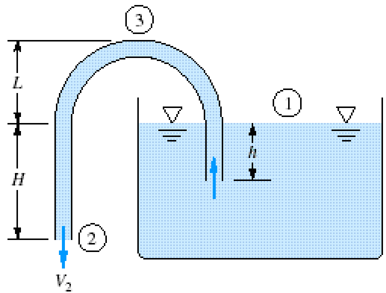


Densité =1.1

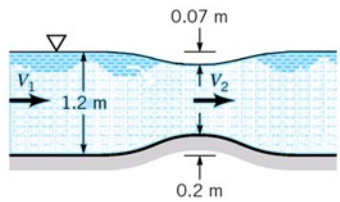
Exercice 9 Une fois le siphon, de la figure, amorcé, l'eau s'écoulera de façon continue tant qu'il y a du fluide dans le réservoir. En utilisant l'équation de Bernoulli (frottement négligeable), montrer que :

a- la vitesse V_2, à la sortie, dépend seulement de l'accélération due à la gravité et de la distance H.

b- la pression minimale (vide absolu) se trouve au point 3 et dépend de la distance L+H.



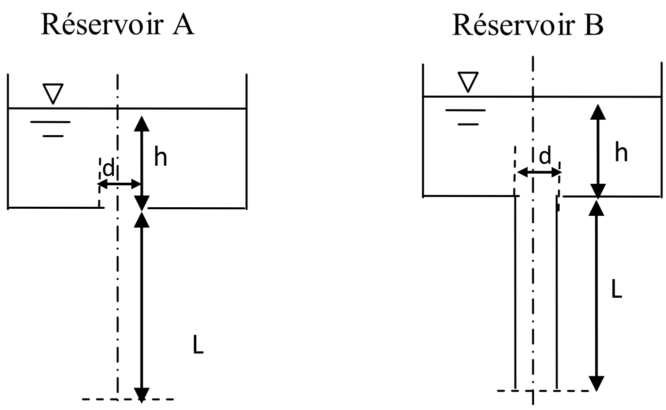
Exercice 10 : Le débit de l'eau qui s'écoule dans un canal est parfois déterminé en utilisant le « canal de Venturi ». Ce dispositif, illustré sur la figure ci-contre, consiste simplement en une bosse au fond du canal



Chapitre III Equations générales régissant l'écoulement d'un fluide parfait incompressible

de 0.2m. Si le niveau de la surface libre diminue d'une distance h=0.07m, calculer le débit volumique, par unité de largeur du canal, pour les conditions données. Le frottement est supposé négligeable.

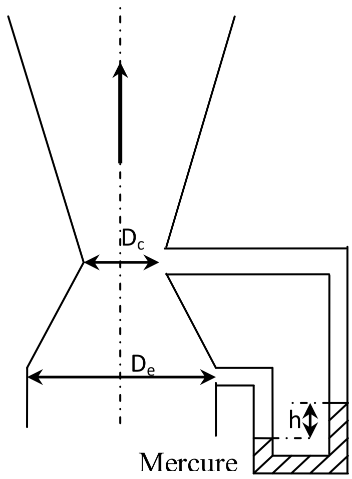
Exercice 11 : Deux réservoirs A et B sont remplis d'eau au même niveau h, (voir figure). Le réservoir A déverse de l'eau à travers un orifice circulaire dans son fond. Le réservoir B déverse de l'eau à travers un tube de longueur L. Si le diamètre de l'orifice du réservoir A est égal à celui du tube du réservoir B, obtenir les expressions des vitesses aux points 1 et 2 dans chacun des deux réservoirs en fonction des données du problème.
Comparer les débits des deux réservoirs. Expliquer la différence.



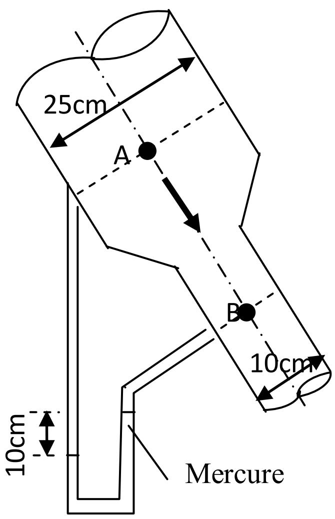
Exercice 12 On considère un tube de venturi placé dans une conduite verticale. Le fluide qui circule dans la conduite est de l'eau.

- Calculer la différence de pression entre l'entrée et le col du venturi.
- Calculer la vitesse au col.
- En déduire le débit.

Données : h=15cm, D_e = 30cm, D_c = 15cm



Exercice 13 : Calculer le débit volumique de l'eau qui s'écoule dans le convergent de la figure ci-contre.

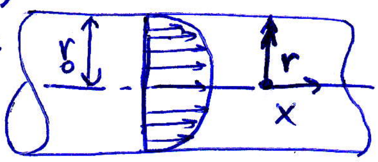


Correction du TD N°3 MDF (2014-2015). ST2

EXO 1

$$U(r) = \gamma(r_0^2 - r^2)$$

$$\begin{cases} r = 0 \rightarrow U = U_{max} = \gamma r_0^2 \\ r = r_0 \rightarrow U = 0 \end{cases}$$



- Le fluide est incompressible ($\rho = cte$) donc le débit volumique est constant le long de la conduite.
- Le profil de vitesse est parabolique. donc la vitesse n'est pas la même sur toute la section, dans ce cas le débit volumique s'écrit:

$$Q = \int_A u\, dA = \int_0^{r_0} u(r)\,(2\pi r\, dr)$$

$$Q = \int_0^{r_0} \gamma (r_0^2 - r^2) \cdot 2\pi r\, dr.$$

$$= 2\pi\gamma \int_0^{r_0} (r_0^2 \cdot r - r^3\, dr)$$

$$\boxed{Q = \frac{\gamma \pi r_0^4}{2} = \frac{\pi r_0^2}{2} \cdot U_{max}}$$

$$(\text{où } U_{max} = U(r=0) = \gamma r_0^2)$$

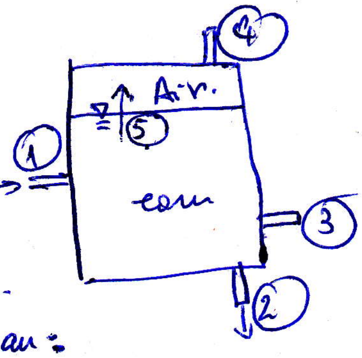
- L'expression de la vitesse moyenne d'écoulement: U_{moy}.

On a: $Q = U_m \cdot A$

$$\rightarrow U_{moy} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi r_0^2}$$

$$\boxed{U_{moy} = \frac{\gamma}{2} r_0^2 = U_{max}/2}$$

EXO 2



a) Déterminer le sens de l'écoult et la vitesse de la surface libre de l'eau:

. On applique le principe de la conservation de masse ou l'éq. de continuité:

Les débits entrants = les débits sortants du fluide.

- $\rho = cte$ donc:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 + Q_5 \quad (1)$$

(Dans ce cas on a considéré que le débit de fluide qui traverse la surface libre de l'eau est Q_5, est un débit sortant (vers le haut).

[On peut écrire aussi:

$$Q_1 + Q_5 = Q_2 + Q_3 \ldots (2)$$

(Ds ce cas Q_5 est un débit entrant il est vers le bas)]

On considère le cas (1):

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 + Q_5$$

$$\therefore Q_5 = Q_1 - Q_2 - Q_3.$$

sachant que $Q_i = U_i A_i = U_i \cdot \frac{\pi D_i^2}{4}$.

$$\therefore U_5 D^2 = U_1 D_1^2 - U_2 D_2^2 - U_3 D_3^2$$

$$U_5 = \frac{U_1 D_1^2 - U_2 D_2^2 - U_3 D_3^2}{D^2}$$

AN: $U_1 = 7,62\ m/s$

$U_2 = 3,05\ m/s$

$U_3 = 3,66\ m/s$.

$D_1 = 76,2.10^{-3}\ m$

$D_2 = 50,8.10^{-3}\ m$.

$D_3 = 63,5 . 10^{-3}\ m$.

$D = 0,61\ m$.

$\therefore \boxed{U_5 = 0,058\ m/s}$

On remarque que la vitesse est positive $U_5 > 0$, donc la supposition faite que le débit Q_5 est sortant est juste, donc le sens d'écoule^t du fluide à travers la surface libre de l'eau est vers le haut.

b. Déduire la vitesse de l'air à travers la conduite (4) :

On a le volume occupé par l'eau est égale au volume de l'air écoulé

donc : $Q_5 = Q_4 = U_4 . \pi D_4^2/4$

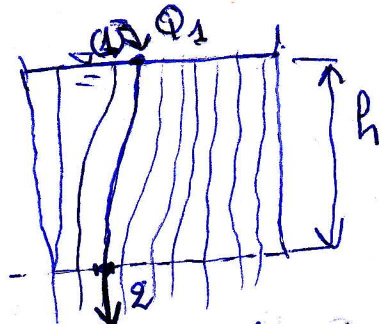
$$U_5 \cdot \frac{\cancel{\pi} D^2}{\cancel{4}} = U_4 \cdot \frac{\cancel{\pi} D_4^2}{\cancel{4}}$$

$$\Rightarrow U_4 = U_5 \cdot \frac{D^2}{D_4^2}$$

$$= 0,058 \cdot \frac{(0,61)^2}{(0,0508)^2}$$

$$\boxed{U_4 = 8,363\ m/s}$$

EXO3



• Déterminer h à laquelle l'équilibre est atteint (régime stationnaire).

En appliquant l'éq. de Bernoulli le long d'une ligne de courant entre (1) et (2) on a:

$$\frac{\cancel{U_1^2}^{\,0}}{2g} + \cancel{\frac{P_1}{\rho g}} + z_1 = \frac{U_2^2}{2g} + \cancel{\frac{P_2}{\rho g}} + z_2$$

on a:

$P_1 = P_2 = P_{atm}$

$z_2 = 0 \rightarrow z_1 = h. \Rightarrow \boxed{h = \frac{U_2^2}{2g}}$

$U_1 = 0$ (régime stationnaire donc, la surface libre de l'eau est tjs dans la même position, et on a un grand réservoir).

$Q_2 = \frac{Q_1}{20}$ (Eq. de continuité) $U_2 = ?$

et

$$Q_2 = U_2 \cdot \pi \frac{d^2}{4} = \frac{Q_1}{20}$$

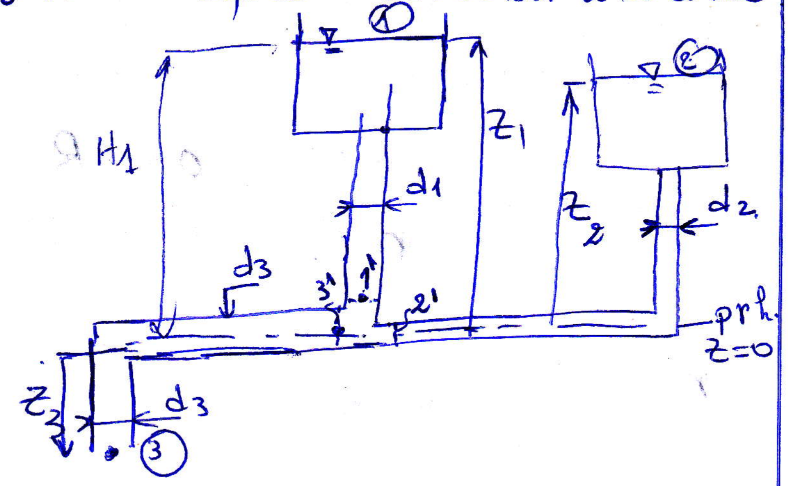
$$U_2 = \frac{4 Q_1}{20 \pi d^2} = \frac{4}{20} \cdot \frac{0,011\,(m^3/s)}{\pi (10^{-2})^2}$$

$U_2 = 7,0\ m/s$

$$\therefore h = \frac{7^2}{2.9,81} = \boxed{2,5\ m = h}$$

EXO4 (Remarque: les Z_1, Z_2 sont des coordonnées et H_i des hauteurs)

• Trouver l'expression du débit à la sortie



On a: $Q_3 = Q_1 + Q_2$.

$Q_1 = V_1' \cdot \frac{\pi d_1^2}{4}$

$Q_2 = V_2' \cdot \frac{\pi d_2^2}{4}$

• Trouver V_1' et V_2'.

* On applique l'éq. de Bernoulli entre ① et ①':

$$\frac{\cancel{V_1^2}^{\,0}}{2g} + \frac{\overset{P_{atm}}{P_1}}{\rho g} + \overset{H_1}{Z_1} = \frac{V_1'^2}{2g} + P_1' + \cancel{Z_1'}^{\,0}$$

$V_1 = 0$ (grand réservoir).

$P_1 = P_{atm}$.

$Z_1' = 0$

$Z_1 = H_1$

donc $\boxed{V_1' = \sqrt{2\,\frac{(P_{atm} - P_1')}{\rho} + gH_1}}$

* On applique l'éq. de Bernoulli entre ② et ②':

$$\frac{\cancel{V_2^2}^{\,0}}{2g} + \frac{\overset{P_{atm}}{P_2}}{\rho g} + Z_2 = \frac{V_2'^2}{2g} + \frac{P_2'}{\rho g} + \cancel{Z_2'}^{\,0}$$

$\therefore V_2' = \sqrt{2\,\frac{(P_{atm} - P_2')}{\rho} + gH_2}$

On remarque que dans l'expression de V_1' et V_2', il y a P_1' et P_2' qui sont inconnus, mais on sait que

$P_1' = P_2' = P_3'$. On va calculer P_3', en appliquant l'éq. de Bernoulli entre ③' et ③

on a:

$$\boxed{\frac{\cancel{V_3'^2}}{2g} + \frac{P_3'}{\rho g} + \cancel{Z_3'}^{\,0} = \frac{\cancel{V_3^2}}{2g} + \frac{\cancel{P_3}^{\,P_{atm}}}{\rho g} + Z_3}$$

$V_3' = V_3$ (même section et même débit)

$Z_3' = 0$

$\boxed{Z_3 = -H_3}$

$P_3 = P_{atm}$.

$\therefore \boxed{P_3' = P_{atm} - \rho g H_3 = P_1' = P_2'}$

On remplace ceci ds V_1' et V_2' on trouve:

$$\boxed{\begin{aligned} V_1' &= \sqrt{2g(H_1+H_3)} \\ V_2' &= \sqrt{2g(H_2+H_3)} \end{aligned}}$$

Alors le débit est:

$$\boxed{Q_3 = \frac{\pi d_1^2}{4}\left(\sqrt{2g(H_1+H_3)}\right) + \frac{\pi d_2^2}{4}\sqrt{2g(H_2+H_3)}}$$

• La vitesse à la sortie: V_3.

$V_3 = \frac{4Q_3}{\pi d_3^2}$

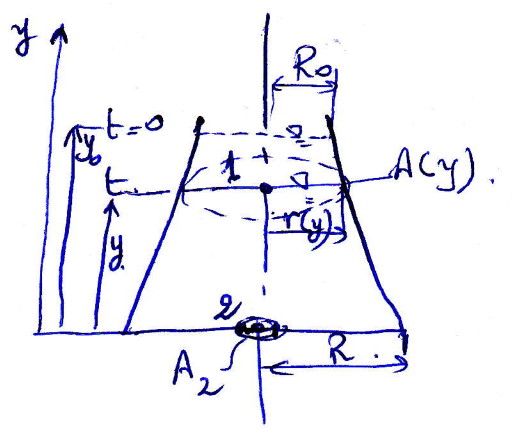
$$\boxed{V_3 = \frac{d_1^2}{d_3^2}\sqrt{2g(H_1+H_3)} + \frac{d_2^2}{d_3^2}\sqrt{2g(H_2+H_3)}}$$

Remarque: Si les conduites avaient le même diamètre dans ce cas

$V_3 = V_3' = V_1' + V_2'$

EXO5 :

- Trouver l'expression de la durée de vidange complète :



On applique l'ég. de Bernoulli entre la surface libre du liquide ① et la sortie ② :

$$\frac{V_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\rho g}+Z_1=\frac{V_2^2}{2g}+\frac{P_2}{\rho g}+Z_2$$

$P_1=P_2=P_{atm}$.

$V_1=0$ (grand réservoir).

$Z_2=0$

$Z_1=y$

donc : $\boxed{V_2=\sqrt{2gy}}$

L'ég de continuité donne :

$$A(y)\cdot V(y)=A_2V_2.$$

$$\begin{cases} A(y)=\pi\cdot r^2(y) \\ r(y)=? \end{cases}$$

$$V(y)=-\frac{dy}{dt}$$

$A_2=$ la section de l'orifice :

Trouver $r(y)$:

Le rayon d'une surface du cône $r(y)$ varie linéairement en fonction de y :

$$r(y)=ay+b \begin{cases} r=R\ :\ y=0\Rightarrow b=R \\ r=R_0\ ;\ y=y_0\ :\ ay_0+R=R_0 \end{cases}$$

$$\therefore a=\frac{R_0-R}{y_0}$$

$$r(y)=\frac{R_0-R}{y_0}\cdot y+R$$

donc :

$$\pi\left(\frac{R_0-R}{y_0}\cdot y+R\right)^2\cdot\left(-\frac{dy}{dt}\right)=A_2\sqrt{2gy}$$

En séparant les variable (y et t) on trouve :

$$dt=-\frac{\pi}{A_2\sqrt{2g}}\left(\frac{R_0-R}{y_0}y+R\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy.$$

$$\int_0^t dt=-\frac{\pi}{A_2\sqrt{2g}}\int_{y_0}^{y}\left(\left(\frac{R_0-R}{y_0}\right)\cdot y+R\right)^2\cdot y^{-\frac{1}{2}}\,dy$$

après calcul on trouve :

$$t=\frac{\pi}{A_2\sqrt{2g}}\left[\left(\frac{R_0-R}{y_0}\right)^2\cdot\frac{y^{5/2}}{5/2}+\frac{2R}{3/2}\,\frac{(R_0-R)}{y_0}\cdot y^{3/2}+\frac{R^2}{\frac{1}{2}}\cdot y^{1/2}\right]_y^{y_0}$$

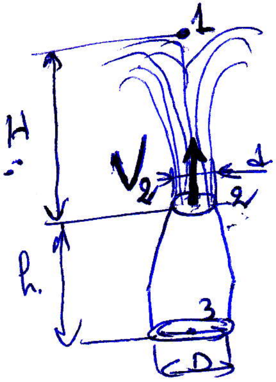
$$\boxed{t=\frac{\pi}{A_2\sqrt{2g}}\left[\left(\frac{R_0-R}{y_0}\right)^2\cdot\frac{2}{5}\left(y_0^{5/2}-y^{5/2}\right)+\frac{4}{3}R\frac{(R_0-R)}{y_0}\left(y_0^{3/2}-y^{3/2}\right)+2R^2\left(y_0^{1/2}-y^{1/2}\right)\right]}$$

La durée de vidange complète est telle que $y=0$

$$\boxed{t_T=\frac{2}{5}\frac{\pi}{A_2\sqrt{2g}}\cdot y_0^{1/2}\left[R_0^2+\frac{4}{3}R_0R+\frac{8}{3}R^2\right]}$$

EXO6

- Calculer le débit volumique du jet d'eau : Q :



Remarque : un jet d'eau est un écoulement à l'air libre, donc la pression du jet d'eau est la pression atmosphérique.

$$Q = V_2 A_2 = V_2 \cdot \frac{\pi d_2^2}{4}$$

$V_2 = ?$

On applique l'éq. de Bernoulli entre 1 et 2. on obtient :

$$\frac{\cancel{V_1^2}}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + z_2 .$$

$P_1 = P_2 = P_{atm}$.

$V_1 = 0$ (point d'arrêt).

$z_1 - z_2 = H$.

$\therefore V_2 = \sqrt{2gH}$

$V_2 = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 8}$

$$\boxed{V_2 = 12{,}53\ m/s}$$

$$Q_2 = 12{,}53 \cdot \frac{\pi \cdot (0{,}01)^2}{4}$$

$$\boxed{Q_2 = 0{,}00098\ m^3/s = 0{,}98\ l/s}$$

- Déterminer la pression effective à l'entrée du convergent :

En appliquant l'éq. de Bernoulli entre 2 et 3 on obtient :

$$\frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + z_2 = \frac{V_3^2}{2g} + \frac{P_3}{\rho g} + z_3$$

$P_2 = P_{atm}$.

$z_2 - z_3 = h$.

$V_3 = ?$

$$\Rightarrow \boxed{P_3 - P_{atm} = \left(\frac{V_2^2 - V_3^2}{2g} + h\right)\rho g}$$

En appliquant l'équation de continuité entre 2 et 3 on trouve :

$$V_2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} = V_3 \cdot \frac{\pi D^2}{4}$$

$$\therefore V_3 = V_2 \cdot \frac{d^2}{D^2} = 12{,}53\ m/s \left(\frac{10}{50}\right)^2$$

$$\boxed{V_3 = 0{,}5012\ m/s}$$

on aura alors :

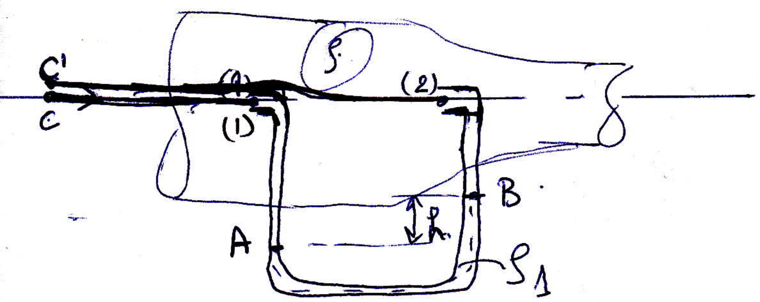
$$P_{3e} - P_{atm} = P_{3\,eff} = \left(\frac{12{,}53^2 - 0{,}50^2}{2 \cdot 9{,}81} + 0{,}5\right) \times 10^3 \times 9{,}81$$

$$\boxed{P_{3\,eff} = 83{,}28 \cdot 10^3\ Pa = 0{,}83\ bar}$$

EXO7

Déterminer h et H:

ⓐ $h = ?$



On a deux tubes de "Pitot" (1) et (2) reliés par un tube manométrique (ρ_2).

On applique l'éq. de l'hydrostatique dans ce tube on aura :

$$P_1 - \cancel{P_A} = \rho g (z_A - z_1)$$

$$\cancel{P_A} - \cancel{P_B} = \rho_2 g (z_B - z_A) \quad +$$

$$\cancel{P_B} - P_2 = \rho g (z_2 - z_B)$$

$$P_1 - P_2 = \rho g (z_A - \cancel{z_1} + \cancel{z_2} - z_B) + \rho_2 g (z_B - z_A)$$

$\{ z_1 = z_2$ ((1) et (2) au même niveau).
$z_B - z_A = h$.

$\therefore P_1 - P_2 = hg(\rho_2 - \rho)$

$$\therefore \boxed{h = \frac{P_1 - P_2}{(\rho_2 - \rho) \cdot g}}$$

Mais $P_1 - P_2 = ?$

pour calculer P_1 et P_2 on applique l'éq de Bernoulli entre (C et 1) et entre (C' et 2) (les deux particule fluide C et C' sont très proche d'où $V_c \simeq V_{c'}$ et $P_c \simeq P_{c'}$.

donc :

$$\frac{V_c^2}{2g} + \frac{P_c}{\rho g} + \cancel{z_c} = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + \cancel{z_1}$$

$z_1 = z_c$ (même niveau).

$V_1 = 0$ (point d'arrêt)

$$\therefore \boxed{P_1 = \rho \frac{V_c^2}{2} + P_c}$$

l'éq de Bernoulli entre C' et 2 :

$$\frac{V_c^2}{2g} + \frac{P_c}{\rho g} + \cancel{z_c} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + \cancel{z_2}$$

$z_2 = z_c$.

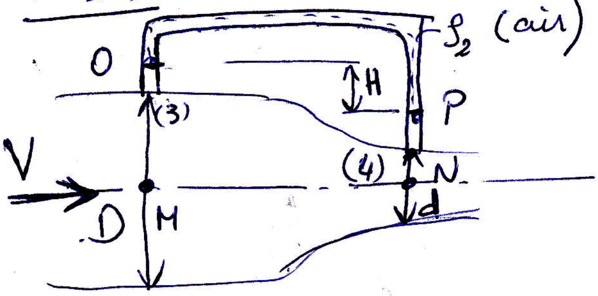
$V_2 = 0$ (point d'arrêt).

$$\therefore \boxed{P_2 = \rho \frac{V_c^2}{2} + P_c}$$

on remarque que $P_1 = P_2$ ($P_1 - P_2 = 0$)

et donc $\boxed{h = 0}$ il n'y a pas de dénivellation.

$H = ?$



On applique l'éq. de l'hydrostatique entre M et O; O et P; et P et N.

$P_M - P_0 = \rho g (z_0 - z_M)$.

$\cancel{P_0 - P_P = \rho_2 g (z_P - z_0)} \approx 0$ ($\rho_2 = \rho_{air} \approx 0$)

$P_P - P_N = \rho g (z_N - z_P)$ (+)

$P_M - P_N = \rho g (z_0 - \cancel{z_M} + \cancel{z_N} - z_P)$

$z_N = z_M$ (m̂ niveau).

$z_0 - z_P = H$.

donc: $P_M - P_N = \rho g H$.

et $\boxed{H = \frac{P_M - P_N}{\rho g}}$

$P_M = ?$ et $P_N = ?$

pour calculer $P_M - P_N$ on applique l'équation de Bernoulli entre M et N

$$\frac{V_M^2}{2g} + \frac{P_M}{\rho g} + \cancel{z_M} = \frac{V_N^2}{2g} + \frac{P_N}{\rho g} + \cancel{z_N}$$

$$\boxed{\frac{P_M - P_N}{\rho g} = \frac{V_N^2 - V_M^2}{2g} = H} \quad \text{(éq. *)}$$

Suivant l'éq. de Continuité on a.

$Q_M = Q_N$

$V_M \cdot A_M = V_N \cdot A_N$ / $A_M = \pi D^2/4$, $A_N = \pi d^2/4$

$$\therefore V_N = V_M \cdot \frac{A_N}{A_M} = \boxed{V_M \cdot \frac{D^2}{d^2} = V_N} \quad \text{(éq **)}$$

On remplace (éq **) dans (éq. *) on trouve:

$$H = \frac{V_M^2 \left(\left(\frac{D^2}{d^2}\right)^2 - 1\right)}{2g}.$$

$$H = \frac{V_M^2}{2g}\left(\frac{D^4}{d^4} - 1\right)$$

AN:

$V_M = V = 0{,}61$ m/s

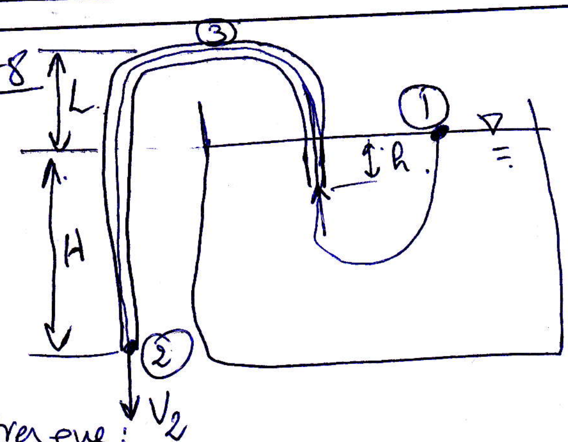
$D = 15{,}24$ cm.

$d = 10{,}16$ cm.

$$H = \frac{(0{,}61)^2}{2 \cdot 9{,}81}\left[\left(\frac{15{,}24}{10{,}16}\right)^4 - 1\right].$$

$$\boxed{H = 0{,}077\,m \approx 77\,mm}$$

EXO8



Montrer que:

a - V_2 dépend de g et H

On applique l'éq. de Bernoulli entre 1 et 2:

$$\frac{\cancel{V_1^2}^{\approx 0}}{2g} + \frac{\cancel{P_1}}{\rho g} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{\cancel{P_2}}{\rho g} + z_2 \qquad P_{atm}$$

$V_1 = 0$ (réservoir)

$P_1 = P_2 = P_{atm}$.

$$\frac{V_2^2}{2g} = Z_1 - Z_2 = H.$$

$$\therefore \boxed{V_2 = \sqrt{2gH}}$$

b. $P_3 = ?$

On applique l'éq. de Bernoulli entre (2) et (3) (on prend (3) un point quelconque ds la conduite (23))

$$\cancel{\frac{V_2^2}{2g}} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 = \cancel{\frac{V_3^2}{2g}} + \frac{P_3}{\rho g} + Z_3.$$

On a suivant l'éq. de continuité.
$V_2 = V_3$ (m̂ débit, m̂ conduite ; donc m̂ section et m̂ vitesse).

$P_2 = P_{atm}$.

$Z_3 - Z_2 = L + H$

donc: $P_3 = P_{atm} + \rho g (Z_2 - Z_3)$.

$P_3 = P_{atm} - \rho g (Z_3 - Z_2)$.

P_3 est minimale qd $Z_3 - Z_2$ est maximale donc: $Z_3 - Z_2 = L + H$

$$\boxed{P_3 = P_{atm} - \rho g (L + H)}$$

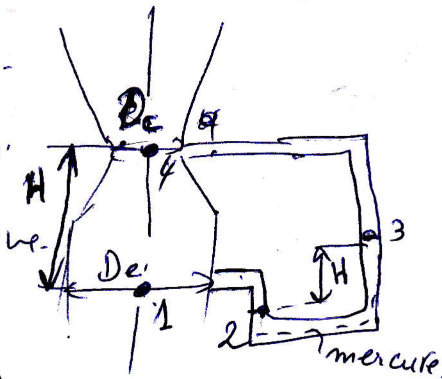
Le vide absolu est $P_3 \simeq 0$ donc:

$$P_{atm} - \rho g (L + H) = 0 \Rightarrow \boxed{L + H = \frac{P_{atm}}{\rho g}}$$

EX09

• Calculer la différence de pression $P_e - P_c$:

On applique l'éq. de l'hydrostatique ds le tube manométrique (statique):



$P_1 - \cancel{P_2} = \rho g (z_2 - z_1)$.

$\cancel{P_2} - \cancel{P_3} = \rho_M g (z_3 - z_2)$. (+)

$\cancel{P_3} - P_4 = \rho g (z_4 - z_3)$

$$P_1 - P_4 = \rho g (\overbrace{z_2 \underbrace{- z_1 + z_4}_{H} - z_3}^{-h}) + \rho_M g (\overbrace{z_3 - z_2}^{h})$$

$P_1 = P_e$

$P_4 = P_c$

$$\therefore P_e - P_c = \rho g (H - h) + \rho_M g h.$$

$$\boxed{P_e - P_c = g h (\rho_M - \rho) + \rho g H}$$

• Calculer la vitesse au col: $V_c = ?$

On applique l'éq. de Bernoulli entre 1 et 2:

$$\frac{V_e^2}{2g} + \frac{P_e}{\rho g} + z_e = \frac{V_c^2}{2g} + \frac{P_c}{\rho g} + z_c.$$

$$\frac{P_e - P_c}{\rho g} + z_e - z_c = \frac{V_c^2 - V_e^2}{2g}.$$

$$\frac{\rho g (\cancel{H} - h) + \rho_M g h}{\rho g} + \cancel{H} = \frac{V_c^2 - V_e^2}{2g}.$$

$$h\left(\frac{\rho_M}{\rho} - 1\right) = \frac{V_c^2 - V_e^2}{2g} \quad \text{... (éq 1)}$$

suivant l'éq. de continuité on a.

$$V_c \cdot \frac{\pi D_c^2}{\cancel{4}} = V_e \cdot \frac{\pi D_e^2}{\cancel{4}} ..$$

$$\therefore V_e = V_c \cdot \frac{D_c^2}{D_e^2} \quad \text{...(éq 2)}$$

on remplace (éq. 2) ds (éq. 1) on trouve:

$$\frac{V_e^2\left(1 - \frac{D_c^4}{D_e^4}\right)}{2g} = h\left(\frac{\rho_M}{\rho} - 1\right).$$

donc $$V_c = \sqrt{\frac{2g\,h\left(\frac{\rho_M}{\rho} - 1\right)}{\left(1 - \frac{D_c^4}{D_e^4}\right)}}.$$

AN:

$h = 15\,cm = 0{,}15\,m$.

$\rho_M = 13600\ kg/m^3$.

$\rho = 1000\ kg/m^3$.

$D_c = 15\,cm = 0{,}15\ m$.

$D_e = 30\,cm = 0{,}2\,m$.

$$\therefore V_c = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}15\left(\frac{13600}{1000} - 1\right)}{\left[1 - \left(\frac{15}{30}\right)^4\right]}}$$

$$\boxed{V_c = 6{,}289\ m/s}$$

• Le débit:

$$Q = \frac{\pi D_c^2}{4} \cdot V_c.$$

$$= \frac{\pi \cdot 0{,}15^2}{4} \cdot 6{,}289 = \boxed{0{,}111\ m^3/s}$$

$Q = 111{,}1\ l/s$.