Convergence de séries à termes positifs

Exercice 1 - Quelques convergences - *L2/Math Spé* - ⋆

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = n\sin(1/n)$ **2**. $u_n = \dfrac{n^n}{2^n}$ **3**. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$

4. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ **5**. $u_n = 1-\cos\dfrac{\pi}{n}$ **6**. $u_n = \dfrac{(-1)^n+n}{n^2+1}$

7. $u_n = a^n n!,\ a\in\mathbb{R}$ **8**. $u_n = ne^{-\sqrt{n}}$ **9**. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$

10. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+3)\sqrt{2^n+1}}{4^n}$.

Exercice 2 - Des critères ! - *L2/Math Spé* - ⋆

Etudier les séries de terme général suivant :

1. $u_n = \dfrac{n!}{n^{an}},\ a\in\mathbb{R}$ **2**. $u_n = \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n$

3. $u_n = \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^{n(-1)^n}$ **4**. $u_n = \dfrac{n^\alpha(\ln n)^n}{n!}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice 3 - Développements limités - *L2/Math Spé* - ⋆

Donner la nature des séries numériques $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \sqrt{\operatorname{ch}\dfrac{1}{n}-1}$ **2**. $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

3. $u_n = \left(n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha},\ \alpha\geq 0$ **4**. $\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3},\ a\in\mathbb{R}$

5. $e^{\frac{1}{n}}-a-\dfrac{b}{n},\ a,b\in\mathbb{R}$ **6**. $\dfrac{1}{n^\alpha}\left((n+1)^{1+1/n}-(n-1)^{1-1/n}\right),\ \alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice 4 - Séries de Bertrand - *L2/Math Spé* - ⋆

Etudier, suivant la valeur de α et β, la convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}.$$

Exercice 5 - Inclassables - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Etudier la nature des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = 1/n$ si n est un carré, et 0 sinon.
2. $u_n = \arctan(n+a)-\arctan(n)$, avec $a>0$.

Exercice 6 - Cas limite de la règle de d'Alembert - *L2/Math Spé* - ⋆

Soit, pour $n\geq 1$ et $a>0$, la suite $u_n = \frac{a^n n!}{n^n}$.

1. Étudier la convergence de la série $\sum_n u_n$ lorsque $a \neq e$.
2. Lorsque $a = e$, prouver que, pour n assez grand, $u_{n+1}/u_n \geq 1$. Que dire de la nature de la série $\sum_n u_n$?

Exercice 7 - Cas limite de la règle de d'Alembert - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. Soit, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$. Quelle est la limite de u_{n+1}/u_n ? Montrer que la série de terme général nu_n est croissante. En déduire que la série de terme général u_n est divergente.
2. Soit, pour tout entier $n \geq 2$, $v_n = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$. Quelle est la limite de v_{n+1}/v_n ? Montrer que, si $0 < \alpha < 3/2$, on a $(n+1)^\alpha v_{n+1} \leq n^\alpha v_n$. En déduire que la série de terme général v_n converge.

Exercice 8 - Un cran au dessus ! - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

$$\mathbf{1}.\ u_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln(n!)} \qquad \mathbf{2}.\ u_n = \int_0^{\pi/n} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx$$

Exercice 9 - Série des inverses des nombres premiers - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Soit $(p_k)_{k\geq 1}$ la suite ordonnée des nombres premiers. Le but de l'exercice est d'étudier la divergence de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$. Pour $n \geq 1$, on pose $V_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$.

1. Montrer que la suite (V_n) est convergente si et seulement si la suite $(\ln V_n)$ est convergente.
2. En déduire que la suite (V_n) est convergente si et seulement si la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$ est convergente.
3. Démontrer que
$$V_n = \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j\geq 1} \frac{1}{p_k^j} \right).$$
4. En déduire que $V_n \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$.
5. Quelle est la nature de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$?
6. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, quelle est la nature de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k^\alpha}$?

Exercice 10 - Valeur absolue et sinus - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Etudier la convergence de la série de terme général $\frac{|\sin(n)|}{n}$.

CONVERGENCE DE SÉRIES À TERMES QUELCONQUES

Exercice 11 - Pour commencer ! - *L2/Math Spé* - ⋆

Etudier la nature des séries $\sum u_n$ suivantes :

$$\mathbf{1}.\ u_n = \frac{\sin n^2}{n^2} \qquad \mathbf{2}.\ u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}$$

$$\mathbf{3}.\ u_n = \frac{\cos(n^2\pi)}{n \ln n}$$

Exercice 12 - Convergence absolue - *L2/Math Spé* - ⋆

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n}\int_0^1 t^n f(t)dt$ est absolument convergente.

Exercice 13 - Une erreur classique... - *L2/Math Spé* - ⋆

1. Montrer que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
2. Démontrer que $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{n}+\dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}+o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
3. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
4. Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice ?

Exercice 14 - Décomposition - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Etudier la convergence des séries suivantes :

1. $u_n=\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\right)$ **2.** $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}},\ \alpha>0$

3. $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n n^\beta},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Exercice 15 - En deux étapes - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Discuter la nature de la série de terme général $u_n=\frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}+b^n}$, où a et b sont deux nombres complexes, $a\neq 0$.

Exercice 16 - Transformation d'Abel - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

On considère deux suites complexes (u_n) et (v_n). On s'intéresse à la convergence de la série $\sum_n u_nv_n$. Pour $n\geq 1$, on note $s_n=\sum_{k=0}^n u_k$.

1. Montrer que, pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ tel que $p\leq q$, on a :
$$\sum_{k=p}^q u_kv_k=s_qv_q-s_{p-1}v_p+\sum_{k=p}^{q-1}s_k(v_k-v_{k+1}).$$
2. Montrer que si la suite (s_n) est bornée, et si la suite (v_n) est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, décroissante et de limite nulle, alors $\sum_n u_nv_n$ est convergente.
3. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0}\frac{\sin(n\theta)}{\sqrt{n}}$ converge pour tout $\theta\in\mathbb{R}$.

Exercice 17 - Décomposition - avec Abel - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Etudier la convergence des séries suivantes :

1. $\sin\left(\dfrac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)$ **2.** $\dfrac{(-1)^n n\cos n}{n\sqrt{n}+\sin n}$.

Exercice 18 - Terme général donné par un produit - *L2/Math Spé/Oral Centrale* - ⋆⋆
Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n=\prod_{q=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^q}{\sqrt{q}}\right).$$

Exercice 19 - Reste d'une série alternée - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. Démontrer que, pour tout $x>0$, on a
$$\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}\geq 0.$$
2. On note $R_n=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$. Étudier la nature de la série $\sum_n R_n$.

Exercice 20 - Critère de Cauchy - *Math Spé* - ⋆⋆⋆
Montrer que la série de terme général $u_n=\frac{\cos(\ln n)}{n}$ est divergente.

Exercice 21 - Un cran au-dessus ! - *Math Spé* - ⋆⋆⋆
Etudier les séries de terme général :

1. $u_n=\sin(\pi e n!)$ et $v_n=\sin\left(\frac{\pi}{e}n!\right)$.
2. $u_n=\frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n^\alpha}$, pour $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice 22 - Convergence d'une série dont le terme général est un produit - *L2/Math Spé* - ⋆⋆⋆
Étudier la convergence de la série de terme général $u_n=\prod_{q=2}^n\left(1+\frac{(-1)^q}{\sqrt{q}}\right)$.

Calculs de somme

Exercice 23 - Avec des racines - *L2/Math Spé* - ⋆
Montrer que la série de terme général

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

(pour $n\geq 2$) est convergente, et calculer sa limite.

Exercice 24 - Exponentielle ! - *L2/Math Spé* - ⋆
Calculer la somme : $\sum_{n\geq 1}\frac{n^3}{n!}$.

Exercice 25 - Elimination imprévue - *L2/Math Spé* - ⋆⋆
Convergence et somme de la série de terme général $\arctan\left(\dfrac{1}{k^2+k+1}\right)$.

Exercice 26 - Série harmonique alternée - *L2/Math Spé* - ⋆

1. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange sur la fonction $t\mapsto\ln(1+t)$, montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente et de somme $\ln 2$.

2. Sachant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}dt$, retrouver d'une autre façon le résultat précédent.

Exercice 27 - Par regroupement ! - *Math Spé* - ⋆⋆⋆

Convergence et calcul de la somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}.$$

ESTIMATION DES SOMMES PARTIELLES ET DU RESTE

Exercice 28 - Très vite ! - *L2/Math Spé* - ⋆

Soit pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{(2n-1)5^{2n-1}}$.

1. Montrer que la série de terme général u_n converge.
2. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Montrer que $R_n \leq \frac{25}{24}u_{n+1}$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ à 0,001 près.

Exercice 29 - Développement asymptotique de la série harmonique - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. Prouver que $H_n \sim_{+\infty} \ln n$.
2. On pose $u_n = H_n - \ln n$, et $v_n = u_{n+1} - u_n$. Étudier la nature de la série $\sum_n v_n$. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On notera γ sa limite.
3. Soit $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Donner un équivalent de R_n.
4. Soit w_n tel que $H_n = \ln n + \gamma + w_n$, et soit $t_n = w_{n+1} - w_n$. Donner un équivalent du reste $\sum_{k\geq n} t_k$. En déduire que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 30 - Somme et développement asymptotique de la série des inverses des carrés - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Le but de l'exercice est de calculer $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et de donner un développement asymptotique de la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

1. (a) Soit $\alpha > 1$ et $k \geq 2$. Démontrer que

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}.$$

   (b) En déduire que

$$\sum_{k\geq n} \frac{1}{k^\alpha} \sim_{+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

2. Soit f une fonction de classe C^1. Démontrer que

$$\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt \longrightarrow_{n\to+\infty} 0.$$

3. On pose $A_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\cos(kt)$. Vérifier que, pour $t\in]0,\pi]$, on a
$$A_n(t)=\frac{\sin\left((2n+1)t/2\right)}{2\sin(t/2)}.$$
4. Déterminer deux réels a et b tels que
$$\int_0^\pi(at^2+bt)\cos(nt)dt=\frac{1}{n^2}.$$
Vérifier alors que
$$\int_0^\pi(at^2+bt)A_n(t)=S_n-\frac{\pi^2}{6}.$$
5. Déduire des questions précédentes que $S_n\to\frac{\pi^2}{6}$.
6. Déduire des questions précédentes que
$$S_n=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{n}.$$

Exercice 31 - Somme de logarithmes - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de $u_n=\sum_{k=1}^n\ln^2(k)$. La série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est-elle convergente ?

Exercice 32 - Décroissance très rapide à l'infini - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Soit $f:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ une fonction de classe C^1 telle que f'/f tend vers $-\infty$ en $+\infty$. Montrer que la série converge et donner un équivalent, lorsque $n\to+\infty$, de $R_n=\sum_{k\geq n}f(k)$.

Produit de Cauchy et permutation des termes

Exercice 33 - Somme d'une série par produit de Cauchy - *L2/Math Spé* - ⋆

Pour $n\geq 0$, on pose $w_n=2^{-n}\sum_{k=0}^n\frac{4^k}{k!}$.

1. Montrer que la série de terme général w_n converge.
2. Calculer sa somme en utilisant le produit d'une série géométrique par une autre série classique.

Exercice 34 - Somme d'une série et produit de Cauchy - *L2/Math Spé* - ⋆

Soient $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ tels que $|a|<1$ et $|b|<1$. Prouver que
$$\left\{\begin{array}{rcll}\dfrac{1}{(1-a)(1-b)}&=&\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}&\text{si } a\neq b,\\ \dfrac{1}{(1-a)^2}&=&\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a^n&\text{si } a=b.\end{array}\right.$$

Exercice 35 - Séries semi-convergentes et produit de Cauchy - *Math Spé/Agreg interne* - ⋆⋆

Soit, pour $n\geq 0$, $u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

1. Vérifier que $\sum_n u_n$ est semi-convergente.
2. Montrer que le produit de Cauchy de $\sum u_n$ par $\sum u_n$ ne converge pas.
3. Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $\sigma(3p) = 2p$, $\sigma(3p+1) = 4p+1$, $\sigma(3p+2) = 4p+3$. Vérifier que σ est une permutation de $\mathbb{N}$. Que peut-on dire de la série $\sum_n u_{\sigma(n)}$?

APPLICATIONS

Exercice 36 - Formule de Stirling - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$. Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$n! \sim_{+\infty} C\sqrt{n}n^n e^{-n}.$$

Exercice 37 - Etude d'une suite récurrente - *L2/Math Spé* - ⋆⋆⋆

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_0 \in]0,\pi[$ et $u_{n+1} = \sin u_n$, pour $n \geq 0$.

1. Etudier la convergence de (u_n).
2. Montrer que u_{n+1}/u_n tend vers 1. Calculer la limite de $\frac{u_n+u_{n+1}}{u_n}$.
3. Montrer que $\frac{u_n-u_{n+1}}{u_n^3}$ tend vers 1/6.
4. En déduire que $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ tend vers 1/3.
5. Montrer que l'on a $\lim(\sqrt{n}u_n) = \sqrt{3}$.

Exercice 38 - Irrationalité - *Math Spé/L2/Agreg interne* - ⋆⋆

On rappelle que $\cos(1)$ est défini par la série $\cos(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$. Montrer que $\cos(1)$ est irrationnel.

RÉVISIONS

Exercice 39 - Vrai/Faux - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Soit (u_n) une suite de nombres réels. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $u_n > 0$ et si la série $\sum u_n$ converge, alors u_{n+1}/u_n a une limite strictement inférieure à 1.
2. Si $u_n > 0$ et si la série $\sum u_n$ converge, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
3. Si $u_n > 0$, et si la série $\sum u_n$ converge, alors la série de terme général u_n^2 converge.
4. Si $(-1)^n n u_n \to 1$, la série $\sum u_n$ converge.
5. Si $(-1)^n n^2 u_n \to 1$, la série $\sum u_n$ converge.

Si vous trouvez une erreur, une faute de frappe, etc... dans ces exercices, merci de la signaler à geolabo@bibmath.net Venez poursuivre le dialogue sur notre forum :

`http://www.bibmath.net/forums`