Université Djillali Liabès de Sidi-Bel-Abbès.
Faculté des Sciences de l'Ingénieur.
2ème Année L.M.D. Sciences & Techniques.

CORRIGÉ DE L'EXAMEN

Exercice 1

*Donner la nature des séries numériques suivantes.(***Noté sur 6 points, 2 points pour chaque série***).*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(1+\frac{\cos(n\pi)}{n^2}\right); \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\mathrm{e}^n}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{2+n}}.$$

Solution de l'exercice N°1 :

1. Nature de la série

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(1+\frac{\cos(n\pi)}{n^2}\right)}$$

Soit $u_n = \sin\left(1+\frac{\cos(n\pi)}{n^2}\right)$, comme $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = \sin 1 \neq 0$, alors la série est grossièrement divergente.

2. Nature de la série

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\mathrm{e}^n}}$$

Méthode 1.
Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n+\mathrm{e}^n}$, on a alors $|u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n+\mathrm{e}^n}\right| = \frac{1}{|n+\mathrm{e}^n|} = \frac{1}{n+\mathrm{e}^n} \leq \frac{1}{\mathrm{e}^n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n = v_n$. Comme v_n est une suite géométrique de raison $(1/\mathrm{e}) < 1$, alors la série $\left(\sum v_n\right)$ est convergente, d'où la série $\left(\sum u_n\right)$ est absolument convergente, donc convergente.

Méthode 2.
Montrons que la série donnée est une série alternée convergente.
1. Il est facile de voir que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n+\mathrm{e}^n} = 0$.
2. Montrons que le terme général est décroissant, pour cela proposons deux méthodes.
• La fonction $f(x) = \frac{1}{x+\mathrm{e}^x}$ a pour dérivée $f'(x) = \frac{-1-\mathrm{e}^x}{(x+\mathrm{e}^x)^2} < 0$, f est donc décroissante $\forall x \in \mathbb{R}$. Il en est de même donc de la suite $|u_n| = \frac{1}{n+\mathrm{e}^n}$, notre série est donc convergente.
• Ou autre méthode, un calcul direct donne,
$|u_{n+1}| - |u_n| = \frac{1}{n+1+\mathrm{e}^{n+1}} - \frac{1}{n+\mathrm{e}^n} = \frac{-1-\mathrm{e}^n(\mathrm{e}-1)}{(n+1+\mathrm{e}^{n+1})(n+\mathrm{e}^n)} < 0$. $(|u_n|)$ est donc une suite décroissante, notre série est donc convergente.
On pouvait montrer aussi que la suite $v_n = \frac{1}{|u_n|}$ est croissante, les calculs sont plus faciles.

Mr Amroun

3. Nature de la série

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{2+n}}}$$

Soit $u_n = \dfrac{n!}{n^{2+n}}$

1. Première méthode :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{2+(n+1)}} \cdot \frac{n^{2+n}}{n!} = \frac{(n+1)n!}{(n+1)^{n+2}(n+1)} \cdot \frac{n^{n+2}}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2} \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 1.(1/\mathrm{e}).\end{aligned}$$

Finalement, $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} < 1$, la série est donc convergente.

2. Deuxième méthode et c'est la meilleure : (Donnée par M. Bekki Ahmed).

$u_n = \dfrac{n!}{n^{2+n}} = \dfrac{n!}{n^n n^2} = \dfrac{1.2.3\ldots n}{(n.n.n\ldots n)n^2} \leqslant \dfrac{n.n.n\ldots n}{(n.n.n\ldots n)n^2} = \dfrac{1}{n^2}$,

$\left(\sum \dfrac{1}{n^2}\right)$ est une série de Riemann convergente, et par comparaison, la série donnée est aussi convergente.

$\mathscr{E}$xercice 2

*Donner le rayon, puis le domaine de convergence de la série entière suivante.(***noté : 1pt+1pt***)*

$$\sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

*Calculer $(\sigma(x))'$; puis donner sa somme. En déduire la somme de la série $\sigma(x)$.(***noté : 1pt+1pt+1pt***)*
*En déduire la valeur de la série :(***noté : 1pt***)*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

*En déduire le domaine de convergence et la somme de la série suivante :(***noté : 1pt***)*

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{9^n(2n+1)}.$$

Solution de l'exercice N°2 :

Soit $\sigma(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\, x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} u_n\, (x^2)^n.$

Posons $x^2 = t$, et considérons la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n\, t^n$, son rayon de convergence est :

• $\dfrac{1}{R}=\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)+1}\cdot\dfrac{2n+1}{(-1)^n}\right|=\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left|\dfrac{2n+1}{2n+3}\right|=1 \iff R=1.$

• La série est donc absolument convergente pour $t\in]-1,1[$; est divergente pour $|t|>1$.
Il en est de même de notre série qui est donc absolument convergente pour $x^2\in]-1,1[\iff x\in]-1,1[$; et divergente pour $|x|>1$.
Finalement le rayon de convergence de la série en x est aussi égal à 1.

Étudions la convergence aux bornes.
Pour $x=1$, on a la série alternée $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ qui est convergente, car son terme général tend vers zéro, et en valeur absolue $\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)$ c'est un terme décroissant.
Pour $x=-1$, il s'agit de l'opposée de la série précédente, (c'est à dire que la série donnée est impaire par rapport à x), donc aussi convergente.

En conclusion, le domaine de convergence de la série est $\Delta=[-1,1]$.

• $$(\sigma(x))'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\frac{x^{2n}}{2n+1}$$
$$(\sigma(x))'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}.$$
Par intégration, on a $\sigma(x)=\displaystyle\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{Arctg}x+C$.
Remarquons que $\sigma(0)=0$, d'où $0=\operatorname{Arctg}0+C\Leftrightarrow 0=0+C\Leftrightarrow C=0$.

Finalement $\sigma(x)=\operatorname{Arctg}x$.

La valeur de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ est donc $\sigma(1)=\operatorname{Arctg}1=\dfrac{\pi}{4}\cdot$

En procédant de façon identique, le domaine de convergence est $\Delta=]-3,3[$.
En dérivant on a, $(\varphi(x))'=\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{9^n(2n+1)}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{9^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{9}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{x^2}{9}}\cdot$
Par intégration, on obtient
$$\varphi(x)=\int\frac{dx}{1-\frac{x^2}{9}}=3\int\frac{d(x/3)}{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}=3\int\frac{dt}{1-t^2}=3\operatorname{Log}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}+C$$
Finalement, on trouve aussi que $C=0$, et donc ;
$\forall x\in]-3,3[,\quad \varphi(x)=3\operatorname{Log}\sqrt{\dfrac{3+x}{3-x}}=\dfrac{3}{2}\operatorname{Log}\dfrac{3+x}{3-x}\cdot$

(*Remarque : la fonction* $\operatorname{Log}\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$ *est aussi notée* $\operatorname{Argth}t$.)

Exercice 3

Soit f une fonction $2\pi-$périodique, et telle que : $f(t) = \pi^2 - t^2$ *si* $|t| \leq \pi$.

1. *Tracer le graphe de cette fonction sur au moins deux périodes.*
2. *Déterminer les cœfficients de Fourier associés à f.*
3. *La somme de la série de Fourier associée à f sera notée $\tilde{f}(t)$.*

   Calculer $\tilde{f}(3)$, $\tilde{f}(24\pi + 7)$ *et* $\tilde{f}(16\pi)$.
4. *Calculer les sommes suivantes :*

$$\mathbb{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \qquad \mathbb{B} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

5. *Que vaut $\tilde{f}(t)$ pour $t \in [\pi, 2\pi]$?*

Solution de l'exercice N° :3

f étant une fonction 2π-périodique. C'est une fonction paire, continue pour tout $x \in \mathbb{R}$. Elle admet en chaque point une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Elle admet un développement en série de Fourier.

- 1. Graphe de f ; (**notée sur 1 Point**).

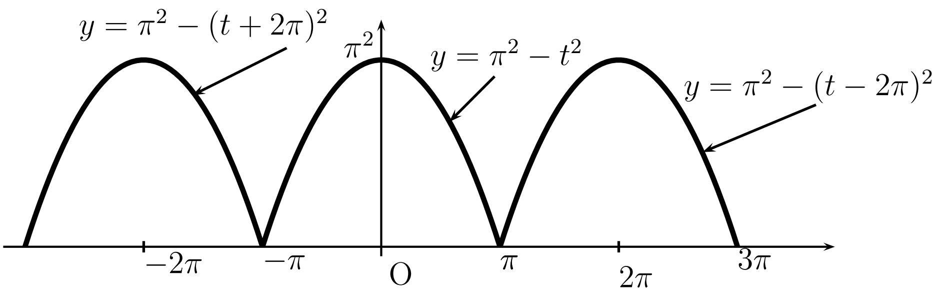

FIG. 1 – graphe de la fonction $y = f(t)$ sur trois périodes.

- 2. Calcul des cœfficients de Fourier de f.

f fonction paire donc,$b_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. (**notée sur 0,5 Point**).

On a : $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \dfrac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)dt = \dfrac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi^2 - t^2)dt = \dfrac{4}{3}\pi^2$, (**notée sur 1 Point**).

On a $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \dfrac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \dfrac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi^2 - t^2)\cos(nt)dt = \dfrac{4(-1)^{n+1}}{n^2}$, (**notée sur 1 Point**).

• 3. La série associée à f est donc ; (**notée sur 1 Point**)

$$\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(nt).$$

(*Remarque : Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $f(t) = \tilde{f}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.*)

On a, (**notée 1.5 points, soit 0.5 Point** par réponse exacte).

$\tilde{f}(3) = f(3) = \pi^2 - 9$, car $3 \in [-\pi, \pi]$.
$\tilde{f}(24\pi + 7) = f(7) = f(7 - 2\pi) = \pi^2 - (7 - 2\pi)^2 = -3\pi^2 + 28\pi - 49$, car $7 - 2\pi \in [-\pi, \pi]$.
$\tilde{f}(16\pi) = f(0) = \pi^2$, car $0 \in [-\pi, \pi]$.

• 4. Sommation des séries, (**notée 1 Point, soit 0.5 Point** par réponse exacte).

Calcul de $\mathbb{A}$, faisons $t = 0$ dans la série de Fourier,

$$\tilde{f}(0) = \pi^2 = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\mathbb{A}.$$

D'où $4\mathbb{A} = \pi^2 - \dfrac{2}{3}\pi^2 \Longleftrightarrow \mathbb{A} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Calcul de $\mathbb{B}$, faisons $t = \pi$ dans la série de Fourier, $\Big($on sait que $\cos(n\pi) = (-1)^n\Big)$;

$$\tilde{f}(\pi) = 0 = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}(-1)^n = \frac{2}{3}\pi^2 - 4\mathbb{B}.$$

D'où $4\mathbb{B} = \dfrac{2}{3}\pi^2 \Longleftrightarrow \mathbb{B} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

• 5. Valeur de $\tilde{f}(t)$ pour $t \in [\pi, 2\pi]$. (**notée 1 Point**).

Pour $t \in [\pi, 2\pi] \Longleftrightarrow t - 2\pi \in [-\pi, 0] \subset [-\pi, \pi]$, d'où l'on obtient,

laboratoire de mathématiques
Amroun
sam 14.02.2009
Nour-Eddine
université Djillali-Liabès

$$\tilde{f}(t) = \tilde{f}(t - 2\pi) = f(t - 2\pi) = \pi^2 - (t - 2\pi)^2 = -3\pi^2 + 4\pi t - t^2, \quad \text{pour} \quad t \in [\pi, 2\pi].$$

Mr Amroun