

SERIEN°1(Transformée de Laplace)

EXERCICE1 :

Calculer les transformées de Laplace des fonctions temporelles suivantes :

- a) $f(t) = e^{-at}$
- b) $f(t) = \cos(\omega t)$
- c) $f(t) = t^n, n \geq 1$
- d) $f(t) = t^5 e^{2t}$
- e) $f(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
- f) $f(t) = e^{-0.5t} u(t-2)$
- g) $f(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$
- h) $f(t) = e^{-0.5t} \sin(\omega t)$
- i) $f(t) = t \cdot e^{-at} \cdot \delta(t-1)$
- j) $f(t) = t \cdot u(t-2) + \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right) \cdot u(t-3)$

EXERCICE2 :

1. Calculer les transformées inverses de Laplace des fonctions suivantes :

- a) $F(p) = \frac{2}{p(p+1)(p-2)}$
- b) $F(p) = \frac{p(p+2)}{p^2 + 2p + 2}$
- c) $F(p) = \frac{5p+16}{(p+2)^2(p+5)}$
- d) $F(p) = \frac{2(p+2)}{p^2 - 2p + 2}$

2. Calculer $f(t \rightarrow 0+)$ et $f(t \rightarrow \infty)$ pour a) et b).

EXERCICE3 :

Résolution d'équations différentielles en utilisant les transformées de Laplace :

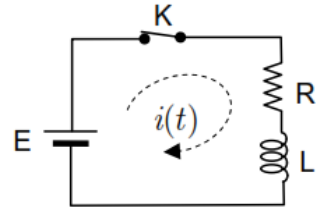
- a) $\ddot{y}(t) + 3y(t) = \sin(t)$ avec $y(0) = 1; \dot{y}(0) = 2$
- b) $\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 20y(t) = 4$ avec $y(0) = -2; \dot{y}(0) = 0$
- c) $\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 5 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6 \frac{dy(t)}{dt} = 0$ avec $y(0) = 3; \dot{y}(0) = -2; \ddot{y}(0) = 7$

TD N°02

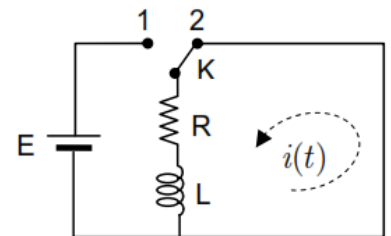
Modélisation et calcul des Fonctions de Transfert

EXERCICE1 :

1. Considérer le circuit de la figure ci-contre. L'interrupteur K est ouvert pour $t < 0$ et fermé à $t = 0$. En utilisant les transformées de Laplace, donner l'évolution du courant $i(t)$ en calculant son expression.



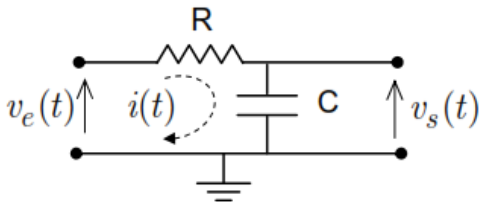
2. Considérer le circuit de la figure ci-contre. L'interrupteur K est en position 1. Le circuit est en régime permanent. A l'instant $t = 0$, on bascule K sur la position 2. En utilisant les transformées de Laplace, donner l'évolution du courant $i(t)$ en calculant son expression.



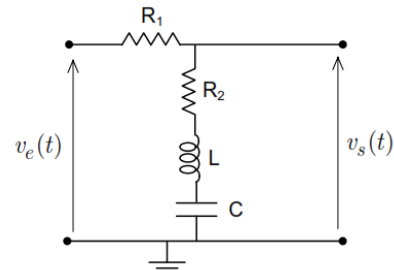
EXERCICE2 :

En supposant les conditions initiales nulles (condensateurs déchargés initialement), calculez les fonctions de transfert des circuits électriques suivants :

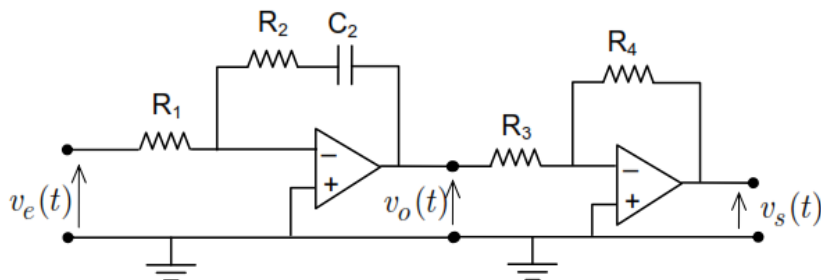
a)



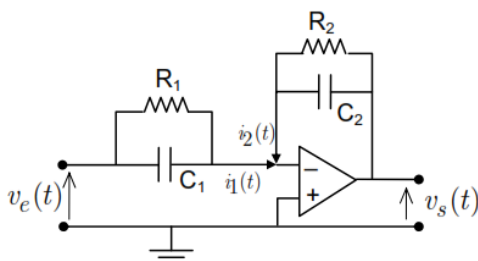
b)



c)



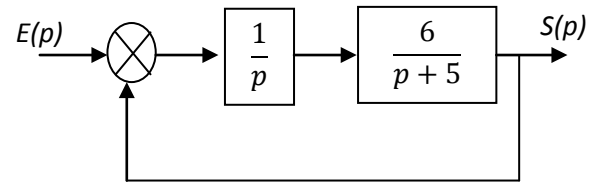
d)



EXERCICE3 :

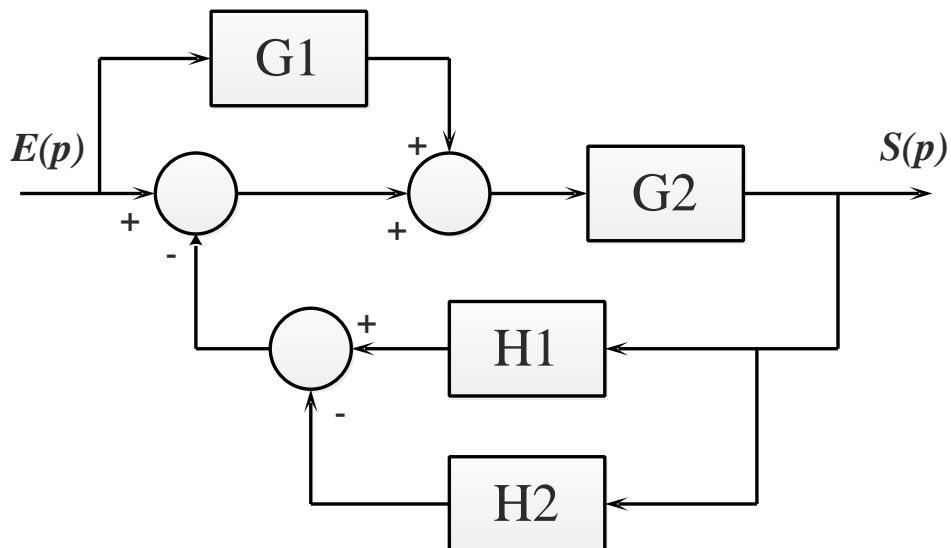
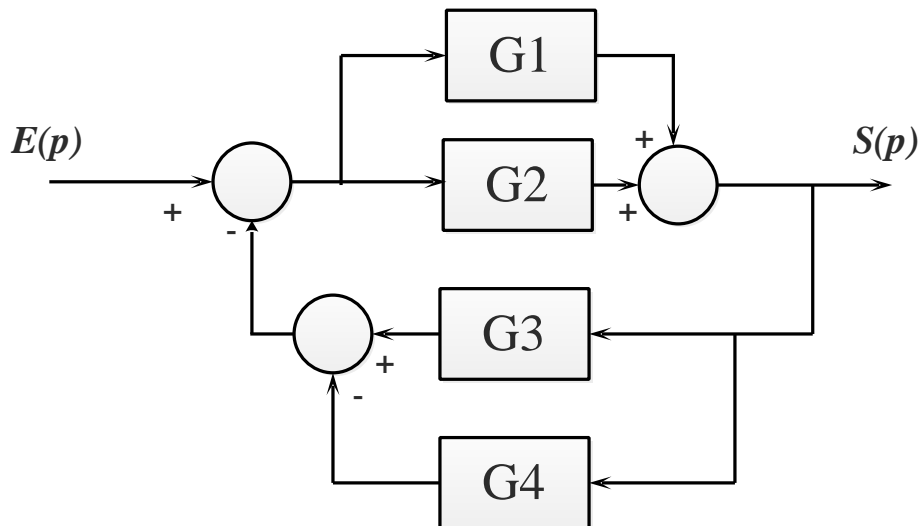
Soit le système représenté par le schéma fonctionnel ci-contre :

1. Donner la FTBO et la FTBF.
2. Calculer et représenter dans le plan complexe les pôles pour les deux FT.



EXERCICE4 :

Déterminez les fonctions de transfert par simplifications successives des blocs fonctionnels.



TD N°03

Réponse temporelle et réponse fréquentielle

EXERCICE 1 :

Déterminer la réponse impulsionnelle et indicielle du système régi par l'équation différentielle suivante :

$$y' + 3y = 6.e(t)$$

EXERCICE 2 :

Soit un système physique d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ régi par l'équation différentielle :

$$2y''(t) + y'(t) + y(t) = e(t)$$

1. Donner l'expression de la fonction de transfert $G(p)$ du système.
2. Mettre cette fonction de transfert sous forme canonique du second ordre en identifiant K , ξ et ω_n .
3. Donner l'allure générale de la réponse indicielle dans ce cas.

EXERCICE 3 :

Tracer les différentes courbes de représentation de la réponse fréquentielle du système du premier ordre représenté par la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{k}{1 + Tp}$$

EXERCICE 4 :

On considère un système du second ordre ayant comme fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{3}{2 + 5p + 10p^2}$$

1. Déduire ξ , K et ω_n .
2. Tracer la réponse indicielle.
3. Tracer la réponse du système dans le lieu de *Bode*, le lieu de *Nyquist* et le lieu de *Black*.

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES :

EXERCICE 1 :

Un système physique a pour fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{p+2}{(p+1).(p^2+4p+20)}$$

1. Décomposer $H(p)$ en éléments simples.
2. En déduire la réponse impulsionnelle du système.

EXERCICE 2 :

Soit un processus linéaire défini par la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{p^2 + p + 4}{(p+1).(p^2 + 2p + 5)}$$

1. Calculer $h(0)$ et $h(+\infty)$ à partir de $H(p)$.
2. Décomposer $H(p)$ en éléments simples et en déduire la réponse impulsionnelle $h(t)$.
3. En déduire la réponse indicielle $s(t)$, vérifier en calculant directement $s(0)$ et $s(+\infty)$ à partir de $H(p)$.

EXERCICE 3 :

Représenter dans le plan de *Nyquist*, *Bode* et *Black* le lieu des fonctions de transfert suivantes :

1. Intégrateur pur : $H(p) = \frac{1}{p}$
2. Dérivateur pur : $H(p) = p$
3. Double intégrateur pur : $H(p) = \frac{1}{p^2}$

EXERCICE 4 :

On souhaite identifier un système par une analyse harmonique. Pour ceci on enregistre la réponse du système à des sinusoïdes $A.\sin(\omega t)$ pour différentes valeurs de ω . on relève la phase φ (en degrés) et le gain G (en dB).

1. Dessiner ces courbes dans le plan de *Bode*.
2. Dire en le justifiant s'il s'agit d'un système du premier ou du deuxième ordre.
3. Donner la fonction de transfert du précédé.

$\omega(\text{rd/s})$	$\varphi(\text{degrés})$	$G(\text{db})$
0	0	20.00
0.1	-5.8	20.04
0.3	-18.2	20.37
0.5	-33.7	20.90
0.7	-53.9	21.25
0.8	-65.8	21.14
0.9	-78.1	20.7
1.00	-90.0	20.0
2	-146.3	8.9
3	-159.4	1.4
5	-168.2	-7.8
10	-174.2	-20

TD N°04

Stabilité et performances dynamiques des systèmes linéaires asservis

EXERCICE 1 :

Pour chacun des systèmes suivants du 1er ordre, calculer les réponses indicielles, puis t_m et t_r à 5% :

$$G_1(p) = \frac{5}{p+5} \quad G_2(p) = \frac{20}{p+20}$$

EXERCICE 2 :

Pour chacun des systèmes suivants du 2ème ordre, calculez ξ , ω_n , t_p , t_m , t_r à 5% et $d\%$:

$$G_1(p) = \frac{120}{p^2 + 12p + 120} \quad G_2(p) = \frac{0.01}{p^2 + 0.002p + 0.01}$$

EXERCICE 3 :

Soit le système à retour unitaire suivant :

Calculer K afin d'assurer un dépassement $d\% \leq 10\%$ sur la réponse indicielle

EXERCICE 4 :

Soit le système à retour unitaire dont la FTBO est :

$$FTBO(p) = \frac{K}{p(p+20)}$$

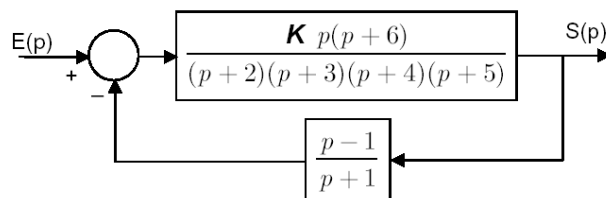
a) Calculez K afin d'obtenir un système avec un amortissement critique.

b) Calculez K afin d'obtenir un système avec un amortissement idéal ($\beta = 45^\circ$).

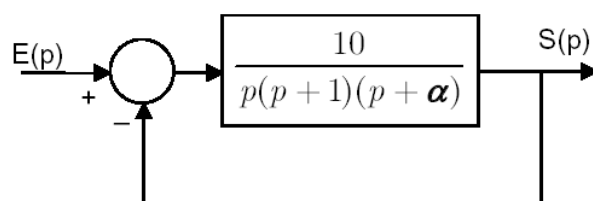
EXERCICE 5 :

En utilisant le critère algébrique de Routh-Hurwitz, déterminez la stabilité en boucle fermée des systèmes asservis suivants :

a) Faire l'étude pour K=10 et K=100



b) Faire l'étude en fonction de α



Rappel Système du 2^{ème} ordre :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$$

Si $E(p) = \frac{1}{p}$ (entrée échelon), alors :

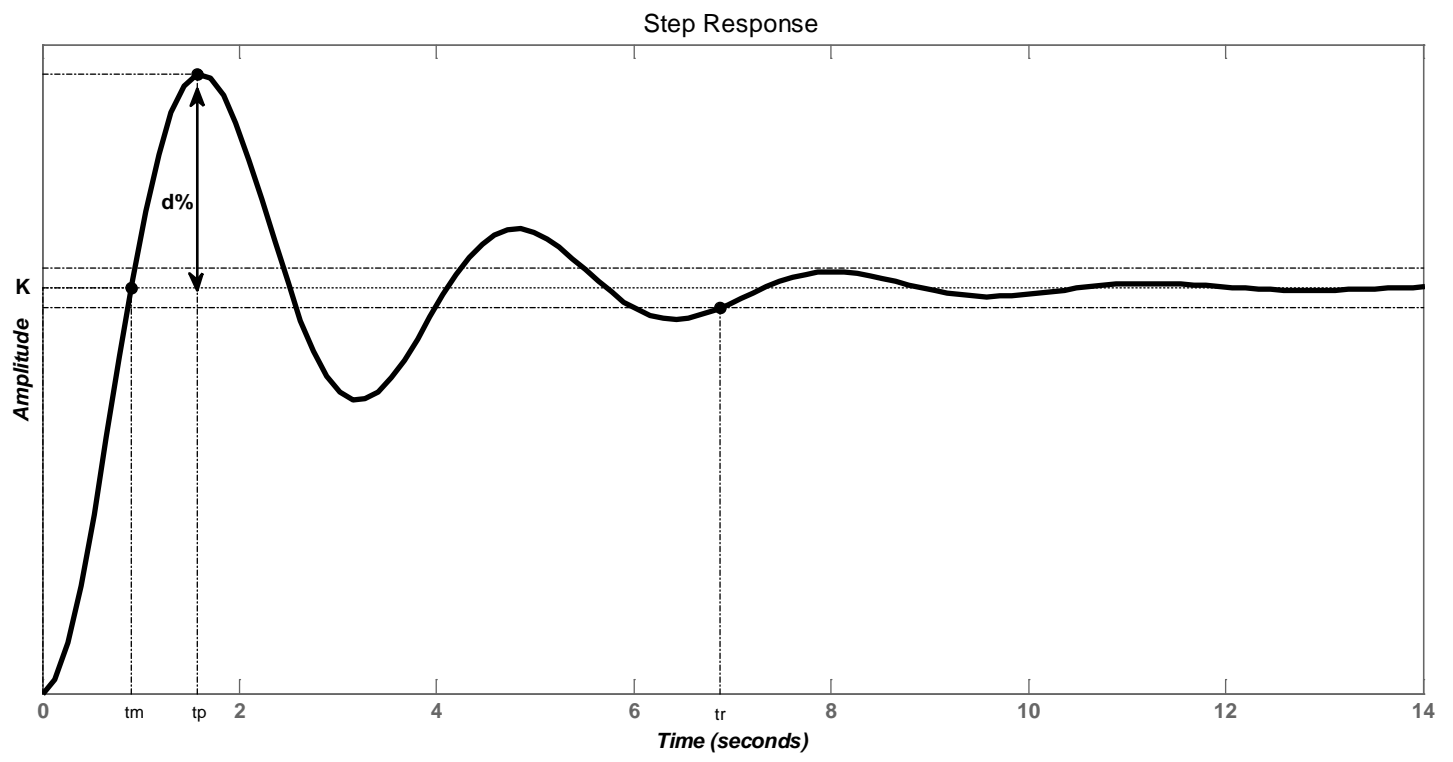
$$S(p) = \frac{1}{p} \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2} \Rightarrow s(t) = TL^{-1}[S(p)] \quad \text{Réponse indicielle}$$

- Temps de montée (t_m): Temps nécessaire pour passer de 0% à 100% de la valeur maximale :

$$t_m = \frac{\pi - \beta}{\omega_p} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \\ \beta = \arctg\left(\frac{\omega_p}{\sigma}\right) = \arctg\left(\frac{\omega_p}{\xi \omega_n}\right) = \arctg\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}\right) \end{cases}$$

- Temps de pic : $t_p = \frac{\pi}{\omega_p} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$
- Dépassement : $d\% = e^{-\pi\left(\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right)} \cdot 100\%$
- Temps de réponse à 5%, t_r : Temps nécessaire pour atteindre 95% de la valeur finale :

$$t_r \text{ à } 5\% = 3 \cdot \frac{1}{\sigma} = 3 \cdot \frac{1}{\xi \cdot \omega_n}$$



SERIE N°5 (Précision statique)

EXERCICE 1:

Calculez le gain statique en BF et les erreurs en régime permanent (en BF) pour une entrée en échelon et en rampe pour les systèmes suivants :

