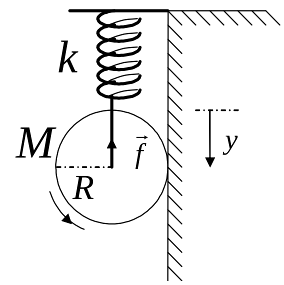
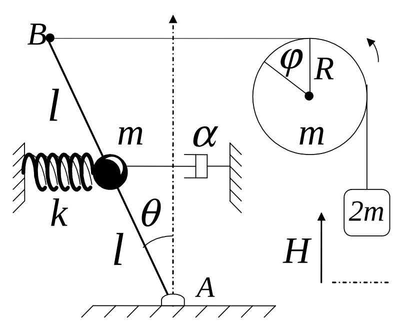
SÉRIE DE TD N° 4 DE PHYS. 3

Exercice 1. Nature du Mouvement Amorti. Équation Horaire. Décrément Logarithmique. Dans son mouvement de va-et-vient, le disque ci-dessous suspendu au ressort reste en contact avec le mur qui le fait tourner sur lui même. L'ensemble des frottements est symbolisé par la force $f = -\alpha v_{disque}$ appliquée au centre du disque. À l'équilibre le ressort était allongé de y_0.



1. Trouver l'énergie potentielle U du système en fonction de y.
2. Simplifier U à l'aide de la condition d'équilibre.
3. Trouver l'énergie cinétique T et la fonction de dissipation $\mathcal{D}$.
4. Trouver le Lagrangien puis l'équation du mouvement.
5. Sachant que k=**13,5**N/m, M=**1**kg, trouver la valeur maximale que le coefficient α ne doit pas atteindre pour que le système oscille.
6. Pour α=**9**N.s/m, trouver la nature du mouvement ainsi que l'équation horaire $y(t)$. (*Initialement* $y(0)$=**1**cm, $\dot{y}(0) = \mathbf{0}$.)
7. Si α=**3**N.s/m, trouver le temps τ nécessaire pour que l'amplitude diminue à $\mathbf{\frac{1}{5}}$ de sa valeur, et calculer le décrément logarithmique δ du mouvement.
8. En réduisant les frottements, le système oscille mais on remarque que l'amplitude est divisée par **2** après **25** oscillations complètes. Trouver le nouveau coefficient d'amortissement α'.

Exercice 2. Un fil inextensible et non glissant, relié au point B et enroulé autour d'un disque, supporte une masse $2m$. À l'équilibre la tige était verticale et l'allongement du ressort était x_0.



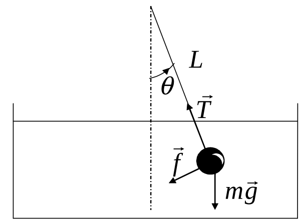
1. Trouver l'énergie potentielle U du système en fonction de $\theta \ll 1$. (cos$\theta \approx 1-\frac{\theta^2}{2}$. sin$\theta \approx \theta$)
2. Simplifier U à l'aide de la condition d'équilibre.
3. Trouver l'énergie cinétique T et la fonction de dissipation $\mathcal{D}$.
4. Trouver le Lagrangien $\mathcal{L}$ puis l'équation du mouvement.
5. Si m=**1**kg, k=**20**N/m, l=**1**m, g=**10**m.s^2, trouver la valeur que le coefficient α ne doit pas atteindre pour que le système oscille.
6. Pour α = **22**N.s/m, trouver la nature du mouvement ainsi que l'équation horaire $\theta(t)$. (*Initialement* $\theta(0) = \mathbf{3}°$, $\dot{\theta}(0) = \mathbf{0}$.)
7. Pour α = **2**N.s/m, trouver le temps τ nécessaire pour que l'amplitude soit divisée par **3**.
8. En remplaçant le coefficient α par α', le système oscille mais l'amplitude diminue au cours du temps: après **20** oscillations complètes l'amplitude diminue à $\mathbf{\frac{1}{4}}$ de sa valeur. Trouver α'.

Rappels: *L'équation de Lagrange des systèmes amortis est:* $\frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} = -\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{q}}$.
Pour $\lambda^2-\omega_0^2<0$: *l'équation horaire est* $q(t)=Ae^{-\lambda t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,t+\phi)$.
Pour $\lambda^2-\omega_0^2=0$: *l'équation horaire est* $q(t)=e^{-\lambda t}(A_1+A_2t)$.
Pour $\lambda^2-\omega_0^2>0$: *l'équation horaire est* $q(t)=A_1e^{(-\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2})t}+A_2e^{(-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2})t}$).

EXERCICES RÉSOLUS.

Pour plus d'exercices, aller sur **http://sites.google.com/site/exerev**

Exercice résolu* **Oscillateur Plongé dans un Liquide**



Dans le système ci-contre la boule (très petite) de masse m suspendue à un fil, est plongée dans un liquide. Au cours de son mouvement, la masse est soumise de la part du liquide à un frottement visqueux $f= -\alpha v$.

1. *Calculer l'énergie potentielle U du système en fonction de $\theta \ll 1$.*

2. *Trouver l'énergie cinétique T et la fonction de dissipation $\mathcal{D}$.*

3. *Trouver le Lagrangien puis l'équation du mouvement.*

4. *Sachant que m=**1**kg, L=**50**cm, g=**10**m/s , trouver la valeur maximale que α ne doit pas atteindre pour que le système oscille.*

5. *Pour α =**10**N.s/m, trouver le temps nécessaire τ pour que l'amplitude diminue à **1/4** de sa valeur.*

6. *En remplaçant le liquide précédent par un autre de faible densité, l'amplitude diminue à **1/6** de sa valeur après **23** oscillations complètes. Trouver le nouveau coefficient de frottement α'.*

Remarque: *La poussée d'Archimède sur un corps est égale au poids du liquide déplacé par le volume. immergé du corps. Le volume de la boule étant très petit, cette force sera négligée.*

Solution:

1. $U=mgh=mg(L-L\cos\theta)\approx \frac{1}{2}mgL\theta^2$. **2**. $T=\frac{1}{2}mv_{Boule}^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$. $\mathcal{D} =\frac{1}{2}\alpha v_{Boule}^2 = \frac{1}{2}\alpha L^2\dot{\theta}^2$.

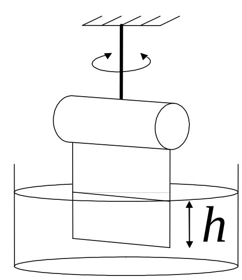
3. $\mathcal{L}=\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgL\theta^2$. L'équation du mouvement est: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}=-\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{\theta}} \Longrightarrow \ddot{\theta}+\frac{\alpha}{m}\dot{\theta}+\frac{g}{L}\theta =0$.

4. $\lambda=\frac{\alpha}{2m}$, $\omega_0^2=\frac{g}{L}$. Un système amorti oscille lorsque son mouvement est pseudo-périodique, c'est à dire lorsque $\lambda^2 - \omega_0^2 <0 \Longrightarrow \lambda < \omega_0 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2m} < \sqrt{\frac{g}{L}} \Longrightarrow \alpha <2m\sqrt{\frac{g}{L}}$. **A.N**: $\alpha <$**8,94**N.s/m.

5. Pour que l'amplitude diminue à 1/4 de sa valeur il faut un temps τ tel que $Ae^{-\lambda(t+\tau)} = \frac{1}{4}Ae^{-\lambda t}$ $\Rightarrow \lambda\tau = \ln 4 \Longrightarrow \tau = \frac{\ln 4}{\lambda}$. Pour α =10N.s/m, on trouve $\lambda =5\text{s}^{-1}$. Donc, $\tau \approx$ **0,28**s.

6. Puisque après 23 oscillations l'amplitude diminue à $\frac{1}{6}$ de sa valeur on a $Ae^{-\lambda'(t+23T')}=\frac{1}{6}Ae^{-\lambda' t} \Rightarrow$ $23\lambda' T'=\ln 6 \Longrightarrow \frac{23.\lambda' 2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\lambda'^2}}=\ln 6 \Longrightarrow \lambda'=\frac{\omega_0 \ln 6}{\sqrt{(46\pi)^2+(\ln 6)^2}} \approx 0{,}05\text{s}^{-1} \Longrightarrow \alpha' = 2m\lambda' \approx$ **0,1**N.s/m.

Exercice résolu** **Oscillateur à Moitié Immergé dans un Liquide**



*Un cylindre suspendu à un fil de torsion porte une plaque rectangulaire plongée dans un liquide qui exerce un couple de frottement visqueux sur le système et ralenti son mouvement rotatoire. La période mesurée hors du liquide est T_0=**2**s.*

1. *Lorsque h=**2**cm, l'amplitude des rotations est divisée par **10** après **3** oscillations complètes. Déduire le facteur d'amortissement λ du montage.*

2. *Sachant que le facteur d'amortissement λ est proportionnel à la profondeur d'immersion h de la plaque ($\lambda=ah$), trouver la profondeur h_c pour laquelle l'amortissement du système soit critique. (Mouvement un régime critique)*

Solution:

1. Puisque le système amorti oscille, son équation horaire est $\theta(t)=Ae^{-\lambda t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t+\phi)$. Puisque après 3 oscillations l'amplitude est divisée par 10, on a $Ae^{-\lambda(t+3T)} = \frac{1}{10}Ae^{-\lambda t} \Longrightarrow$ $3\lambda T= \ln 10 \Longrightarrow \frac{3\lambda.2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}} = \ln 10 \Longrightarrow \lambda = \frac{\omega_0 \ln 10}{\sqrt{(6\pi)^2+(\ln 10)^2}} = \frac{2\pi}{T_0}\frac{\ln 10}{\sqrt{(6\pi)^2+(\ln 10)^2}} \approx$ **0,38**s^{-1}.

2. Puisque λ est proportionnel à la profondeur d'immersion h, on a $\lambda =ah \Longrightarrow a= \frac{\lambda}{h}$.
On a alors à l'immersion critique $\lambda_c =ah_c = \frac{\lambda}{h}h_c$. D'où $h_c = \frac{h\lambda_c}{\lambda}$.
Puisque en régime critique $\lambda_c = \omega_0$, on déduit que $h_c = \frac{h\omega_0}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}\frac{2\pi}{T_0} \approx$ **16,5**cm.

CORRIGÉ DE LA SÉRIE N°4 DE PHYS. 3

Exercice 1

1. L'énergie potentielle est: $U = U_M + U_{ressort} = -Mgy + \frac{1}{2}k(y+y_0)^2 = -Mgy + \frac{1}{2}ky^2 + kyy_0 + C^{te}$.

2. Grâce à la condition d'équilibre : $\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \Longrightarrow -Mg + ky_0 = 0$, U se simplifie: $U = \frac{1}{2}ky^2 + C^{te}$.

3. L'énergie cinétique est: $T = T_{(M)Rotation} + T_{(M)Translation} = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2$.

En descendant le disque tourne sur lui même sans glissement:($R\theta = y \Longrightarrow R\dot{\theta} = \dot{y}$). Donc, $T = \frac{3}{4}M\dot{y}^2$.

La fonction de dissipation est $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha v_{disque}^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2$.

4. Le Lagrangien est : $\mathcal{L} = T - U = \frac{3}{4}M\dot{y}^2 - \frac{1}{2}ky^2 + C^{te}$.

L'équation du mouvement est: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{y}} \Longrightarrow \ddot{y} + \frac{2\alpha}{3M}\dot{y} + \frac{2k}{3M}y = 0$.

L'équation est de la forme $\ddot{y} + 2\lambda\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$ avec $\lambda = \frac{\alpha}{3M}$. $\omega_0^2 = \frac{2k}{3M}$.

5. La condition d'oscillation des systèmes amortis est $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0 \Longrightarrow \lambda < \omega_0 \Longrightarrow \frac{\alpha}{3M} < \sqrt{\frac{2k}{3M}} \Longrightarrow$

$\alpha < \sqrt{6kM} = \mathbf{9}$N.s/m. C'est la valeur que α ne doit pas atteindre pour qu'il ait oscillation.

6. La nature du mouvement est donnée par le signe de $\lambda^2 - \omega_0^2$. ($\lambda = \frac{\alpha}{3M} = 3\text{s}^{-1}$. $\omega_0^2 = \frac{2k}{3M} = 9\text{rad}^2/\text{s}^2$).

Donc, $\lambda^2 - \omega_0^2 = 0 \Longrightarrow$ le mouvement est en régime **critique**.

Son équation horaire est: $y(t) = e^{-\lambda t}(A_1 + A_2 t) = e^{-3t}(A_1 + A_2 t)$.

Pour trouver A_1 et A_2 nous utilisons les conditions initiales:

$$\begin{cases} y(0) = A_1 = 1\text{cm} \\ \dot{y}(0) = -3A_1 + A_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A_1 = \mathbf{1}\text{cm.} \\ A_2 = \mathbf{3}\text{cm/s.} \end{cases} \Longrightarrow y(t) = e^{-\mathbf{3}t}(\mathbf{1} + \mathbf{3}t)\ (\text{cm})$$

7. Puisque pour $\alpha = \mathbf{3N.s/m} < \mathbf{9}$N.s/m le mouvement est pseudo-périodique, l'amplitude est $Ae^{-\lambda t}$. Pour que cette amplitude diminue à 1/5 de sa valeur il faut un temps τ tel que $Ae^{-\lambda(t+\tau)} = \frac{1}{5}Ae^{-\lambda t} \Longrightarrow$

$\lambda\tau = \ln 5 \Longrightarrow \tau = \frac{\ln 5}{\lambda}$. Avec $\alpha = 3$N.s/m, on trouve $\lambda = 1\text{s}^{-1}$. Soit $\tau \approx \mathbf{1{,}61}$s.

Le décrément logarithmique est $\delta = \ln\frac{Ae^{-\lambda t}}{Ae^{-\lambda(t+T)}} = \lambda T = \frac{\lambda.2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \approx 2{,}22$.

8. Puisque après 25 oscillations l'amplitude est divisée par 2 on a $Ae^{-\lambda'(t+25T')} = \frac{1}{2}Ae^{-\lambda' t} \Longrightarrow$

$25\lambda' T' = \ln 2 \Longrightarrow \frac{25.\lambda' 2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda'^2}} = \ln 2 \Longrightarrow \lambda' = \frac{\omega_0 \ln 2}{\sqrt{(50\pi)^2 + (\ln 2)^2}} \approx 0{,}013\text{s}^{-1} \Longrightarrow \alpha' = 3M\lambda' \approx \mathbf{0{,}04}$N.s/m.

Exercice 2

1. $U = U_m + U_k + U_{2m} = -mgh + \frac{1}{2}k(x_0 - x)^2 + 2mgH$ (Fil inextensible et non glissant $\Rightarrow H = R\varphi = 2l\sin\theta$)

$$\approx -mg(l - l\cos\theta) + \frac{1}{2}k(x_0 - l\sin\theta)^2 + 2mg.2l\sin\theta$$

$$\approx -mgl\frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2}k(x_0 - l\theta)^2 + 4mgl\theta = -mgl\frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2}kx_0{}^2 - kl\theta x_0 + \frac{1}{2}kl^2\theta^2 + 4mgl\theta.$$

2. Grâce à la condition d'équilibre : $\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow -klx_0 + 4mgl = 0$, U se simplifie: $U = \frac{1}{2}(kl^2 - mgl)\theta^2 + \mathrm{C}^{te}$.

S'il n'est pas demandé d'écrire la condition d'équilibre, l'énergie potentielle peut être simplifiée directement en supprimant tous les termes linéaires en θ : en ne gardant que les termes quadratiques.

3. $T = T_m + T_{2m} + T_{disque} = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}2m\dot{H}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + m\dot{H}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2$.

(Fil inextensible et non glissant $\Rightarrow H = R\varphi = 2l\sin\theta \approx 2l\theta$, et $R\varphi = 2l\sin\theta \approx 2l\theta \Longrightarrow \dot{H} \approx 2l\dot{\theta}$. $R\dot{\varphi} \approx 2l\dot{\theta}$).

Donc, $T = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + m(2l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{4}m(2l\dot{\theta})^2 = \frac{11}{2}ml^2\dot{\theta}^2$.

La fonction de dissipation est $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha v_m^2 = \frac{1}{2}\alpha(l\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\alpha l^2\dot{\theta}^2$.

4. Le Lagrangien est : $\mathcal{L} = T - U = \frac{11}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(kl^2 - mgl)\theta^2 + \mathrm{C}^{te}$.

L'équation du mouvement est: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{11m}\dot{\theta} + \frac{kl - mg}{11ml}\theta = 0$.

5. Pour qu'un système amorti oscille il faut que son mouvement soit pseudo-périodique, c-à-d que:

$\lambda^2 - \omega_0^2 < 0 \Longrightarrow \lambda < \omega_0 \Longrightarrow \frac{\alpha}{22m} < \sqrt{\frac{kl - mg}{11ml}} \Longrightarrow \alpha < 22m\sqrt{\frac{kl - mg}{11ml}} \approx \mathbf{21}$N.s/m.

6. La nature du mouvement est donnée par le signe de $\lambda^2 - \omega_0^2$. ($\lambda = \frac{\alpha}{22m} = 1\mathrm{s}^{-1}$. $\omega_0^2 = \frac{kl - mg}{11ml} \approx 0{,}91\mathrm{rad}^2/\mathrm{s}^2$).

Donc, $\lambda^2 - \omega_0^2 > 0 \Rightarrow$ le mouvement est apériodique. Son équation horaire est:

$\theta(t) = A_1 e^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} = A_1 e^{-\mathbf{1{,}3}t} + A_2 e^{-\mathbf{0{,}7}t}$.

Pour trouver A_1 et A_2 utilisons les conditions initiales:

$$\begin{cases} \theta(0) = A_1 + A_2 = 3°. \\ \dot{\theta}(0) = -\mathbf{1{,}3}A_1 - \mathbf{0{,}7}A_2 = 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A_1 = -\mathbf{3{,}5}°. \\ A_2 = \mathbf{6{,}5}°. \end{cases} \Longrightarrow \theta(t) = -\mathbf{3{,}5}e^{-\mathbf{1{,}3}t} + \mathbf{6{,}5}e^{-\mathbf{0{,}7}t}. \quad (°)$$

7. Pour que l'amplitude soit divisée par 3 il faut un temps τ tel que $Ae^{-\lambda(t+\tau)} = \frac{1}{3}Ae^{-\lambda t} \Longrightarrow$

$\lambda\tau = \ln 3 \Longrightarrow \tau = \frac{\ln 3}{\lambda}$. Avec $\alpha = 2$N.s/m, on trouve $\lambda \approx 0{,}09\mathrm{s}^{-1}$. Soit $\tau \approx \mathbf{12{,}2}$s.

8. Puisque après 20 oscillations l'amplitude diminue à 1/4 de sa valeur on a $Ae^{-\lambda'(t+20T')} = \frac{1}{4}Ae^{-\lambda' t} \Longrightarrow$

$20\lambda' T' = \ln 4 \Longrightarrow \frac{20\lambda'.2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda'^2}} = \ln 4 \Longrightarrow \lambda' = \frac{\omega_0 \ln 4}{\sqrt{(40\pi)^2 + (\ln 4)^2}} \approx 0{,}01\mathrm{s}^{-1} \Longrightarrow \alpha' = 22m\lambda' \approx \mathbf{0{,}22}$N.s/m.