# VI) Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ concaves (ou convexes) sur un intervalle

## 1) Définitions et premières propriétés

### a) Définitions

**Définition 7** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle $I$.*
*La fonction $f$ est **concave** sur $I$ si :*
$\forall x_1, x_2 \in I$ *et* $\forall t \in [0;1]$ *on a :* $f(tx_1 + (1-t)x_2) \geqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$.
*La fonction $f$ est **convexe** sur $I$ si :*
$\forall x_1, x_2 \in I$ *et* $\forall t \in [0;1]$ *on a :* $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$.

**Remarque 11**

- *Si les inégalités sont strictes, on parle alors de fonction **strictement concave** ou **strictement convexe** sur $I$.*
- *Si $x_1 = x_2$, alors les inégalités des définitions deviennent alors des égalités et sont donc satisfaites; il en est de même, si $t = 0$ ou $t = 1$.*

  *Par conséquent, nous supposerons dans la suite que $x_1 \neq x_2$ et que $t \in ]0;1[$.*

  *On poura donc dire :*

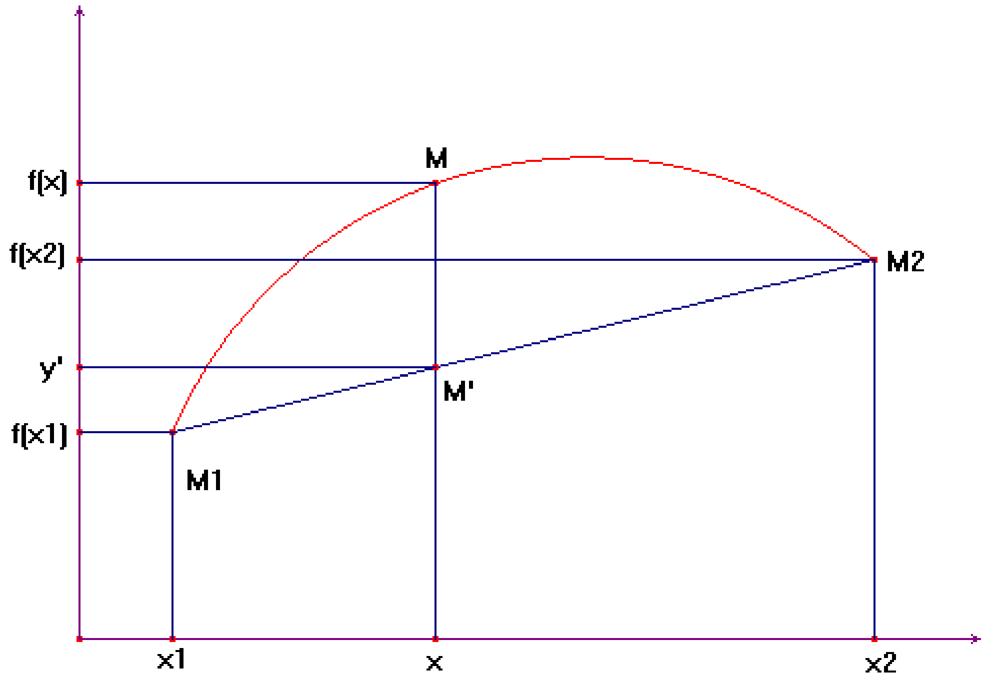
  *La fonction $f$ est **concave** sur $I$ si :*

  $\forall x_1, x_2 \in I$ *tels que* $x_1 \neq x_2$ *et* $\forall t \in ]0;1[$ *on a :* $f(tx_1 + (1-t)x_2) \geqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$.

  *La fonction $f$ est **convexe** sur $I$ si :*

  $\forall x_1, x_2 \in I$ *tels que* $x_1 \neq x_2$ *et* $\forall t \in ]0;1[$ *on a :* $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$.

### b) Interprétation géométrique




Posons $x = tx_1 + (1-t)x_2$, alors on a : $x - x_2 = t(x_1 - x_2)$.
Puisque $t \in [0;1]$, on peut dire que $x$ appartient à l'intervalle $[x_1, x_2]$ ou $[x_2, x_1]$.

La droite $(M_1M_2)$ a pour équation : $y - y_{M_2} = \dfrac{y_{M_1} - y_{M_2}}{x_{M_1} - x_{M_2}} (x - x_{M_2})$, soit encore :
$y - f(x_2) = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_2)$.

Au point $M'$on a : $x - x_2 = t(x_1 - x_2)$ donc l'ordonnée $y'$ de $M'$ est égale à :
$f(x_2) + t\,[f(x_1) - f(x_2)] = tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$.

Dire que la fonction $f$ est concave sur $I$ revient à dire que l'on a $f(x) \geqslant y'$.

Cala signifie que le point $M$ est au "dessus" du point $M'$, soit encore que la courbe $(C)$ représentative de la fonction $f$ est située "au dessus" de toute sécante $(M_1M_2)$.

Evidemment, lorsque la fonction $f$ est convexe sur $I$, on a la situation inverse.

**c) Exemple** On veut étudier la concavité sur $I = \mathbb{R}$ de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x + 3$.

On a : $f\,(tx_1 + (1-t)\,x_2) = 5\,[tx_1 + (1-t)\,x_2] + 3 = 5tx_1 + 5\,(1-t)\,x_2 + 3$.

De plus, $tf(x_1) + (1-t)f(x_2) = t\,(5x_1 + 3) + (1-t)\,(5x_2 + 3) = 5tx_1 + 5\,(1-t)\,x_2 + 3$.

Par conséquent, il y a égalité entre $f\,(tx_1 + (1-t)\,x_2)$ et $tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$.

On peut donc conclure que la fonction $f$ est à la fois concave et convexe sur $\mathbb{R}$.

**Remarque 12** *Le cas précédent se généralise aisément à toute fonction affine (c'est à dire du type $f(x) = ax + b$); dans ce cas, la courbe représentative qui est la droite d'équation $y = ax + b$ coïncide avec la droite $(M_1M_2)$.*

**d) Propriétés**

**Proposition 8** *Si $f_1$ et $f_2$ sont deux fonctions concaves sur $I$, alors la fonction $f = \min(f_1, f_2)$ est une fonction concave sur $I$.*

**Preuve.** Rappelons tout d'abord ce qu'est la fonction $f = \min(f_1, f_2)$.

Cette fonction est définie par : $\forall x \in I$, on a : $f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ si } f_1(x) \leqslant f_2(x) \\ f_2(x) \text{ sinon} \end{cases}$. Par conséquent, on peut affirmer que dans tous les cas on a : $f(x) \leqslant f_1(x)$ et $f(x) \leqslant f_2(x)$.

Considérons deux éléments $x_1$ et $x_2$ de $I$ et $t \in [0;1]$; posons $x = tx_1 + (1-t)\,x_2$.

Puisque la fonction $f_1$ est concave, on a : $f_1\,(tx_1 + (1-t)\,x_2) = f_1(x) \geqslant tf_1(x_1) + (1-t)f_1(x_2)$.

De plus, comme $t \geqslant 0$ et $(1-t) \geqslant 0$ et puisque $f(x_1) \leqslant f_1(x_1)$ et $f(x_2) \leqslant f_1(x_2)$ on en déduit que :
$tf_1(x_1) + (1-t)f_1(x_2) \geqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$.

De même, $f_2$ etant concave, on a :
$f_2\,(tx_1 + (1-t)\,x_2) = f_2(x) \geqslant tf_2(x_1) + (1-t)f_2(x_2) \geqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$.

Par suite, $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont tous deux supérieurs ou égaux à $tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ et comme $f(x)$ vaut soit $f_1(x)$, soit $f_2(x)$, on en déduit que $f(x) \geqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ et $f$ est donc une fonction concave sur $I$. ■

**Remarque 13** *La propriété précédente est fausse si $f = \max(f_1, f_2)$.*

On a une propriété analogue pour les fonctions conexes, à savoir :

**Proposition 9** *Si $f_1$ et $f_2$ sont deux fonctions convexes sur $I$, alors la fonction $f = \max(f_1, f_2)$ est une fonction convexe sur $I$.*

**Preuve.** Il suffit de calquer la démonstration précédente et d'utiliser la définition suivante pour la fonction $f = \max(f_1, f_2)$ :

$\forall x \in I$, on a : $f(x) = \begin{cases} f_2(x) \text{ si } f_1(x) \leqslant f_2(x) \\ f_1(x) \text{ sinon} \end{cases}$. ■

**Remarque 14** *La propriété précédente est fausse si $f = \min(f_1, f_2)$.*

**Proposition 10** *Si $f_1$ et $f_2$ sont deux fonctions concaves sur $I$, alors la fonction $f = f_1 + f_2$ est une fonction concave sur $I$.*

**Preuve.** Considérons deux éléments $x_1$ et $x_2$ de $I$ et $t \in [0;1]$.
Posons $x = tx_1 + (1-t)\,x_2$.
Puisque les fonctions $f_1$ et $f_2$ sont concaves, on a :
$f_1\,(tx_1 + (1-t)\,x_2) = f_1(x) \geqslant tf_1(x_1) + (1-t)f_1(x_2)$ et :
$f_2\,(tx_1 + (1-t)\,x_2) = f_2(x) \geqslant tf_2(x_1) + (1-t)f_2(x_2)$.
On ajoute membre à membre ces deux inégalités et on obtient :
$f_1(x) + f_2(x) \geqslant tf_1(x_1) + (1-t)f_1(x_2) + tf_2(x_1) + (1-t)f_2(x_2)$, soit encore :
$(f_1 + f_2)\,(x) \geqslant t\,(f_1 + f_2)\,(x_1) + (1-t)\,(f_1 + f_2)\,(x_2)$ et par conséquent, la fonction $f = f_1 + f_2$ est concave sur $I$. ■

**Proposition 11** *Si $f$ est une fonction concave sur $I$ et si $\lambda$ est un réel positif ou nul, alors la fonction $\lambda f$ est concave sur $I$.*

**Preuve.** Comme $f$ est une fonction concave sur $I$ alors, si $x_1$ et $x_2$ sont deux élements de $I$ et si $t \in [0;1]$ alors on a :
$f\,(tx_1 + (1-t)\,x_2) \geqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$.
Multiplions les deux membres de l'inégalité précédente par $\lambda \geqslant 0$, nous obtenons :
$(\lambda f)\,(tx_1 + (1-t)\,x_2) \geqslant t(\lambda f)(x_1) + (1-t)(\lambda f)(x_2)$ et par conséquent, la fonction $\lambda f$ est concave sur $I$. ■

**Remarque 15** *On a des propriétés analogues pour des fonctions convexes.*

**Proposition 12** *$f$ est une fonction convexe sur $I$ si et seulement si $(-f)$ est une fonction concave sur $I$.*

**Preuve.** ($f$ est une fonction convexe sur $I$)
$\Leftrightarrow$ ($\forall x_1, x_2 \in I$ et $\forall t \in [0;1]$ on a : $f\,(tx_1 + (1-t)\,x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$)
$\Leftrightarrow$ ($\forall x_1, x_2 \in I$ et $\forall t \in [0;1]$ on a : $(-f)\,(tx_1 + (1-t)\,x_2) \geqslant t(-f)(x_1) + (1-t)(-f)(x_2)$) (On a multiplié par $-1$ donc l'inégalité change de sens)
$\Leftrightarrow$ ($(-f)$ est une fonction concave sur $I$). ■

## 2) Caractérisations des fonctions concaves sur un intervalle de $\mathbb{R}$

Dans tout ce paragraphe, $I$ désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ désignera une application de $I$ vers $\mathbb{R}$.

**a) Première caractérisation** Soient $x_1$ et $x_2$ deux éléments de $I$ tels que $x_1 < x_2$ (le résultat serait analogue si on avait $x_1 > x_2$).
Soit $x = tx_1 + (1-t)\,x_2$ avec $t \in ]0;1[$. On a donc : $x_1 < x < x_2$.
De plus, on a : $x - x_2 = t(x_1 - x_2)$ et par conséquent, $t = \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2}$.
Enfin, posons $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ et $y = f(x)$.

**Proposition 13** *On a :* $(y \geqslant ty_1 + (1-t)y_2) \Leftrightarrow \left(\dfrac{y_1 - y}{x_1 - x} \geqslant \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right) \Leftrightarrow \left(\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \geqslant \dfrac{y - y_2}{x - x_2}\right)$.

**Preuve.** Nous noterons (1) la première inégalité, (2) la seconde et (3) la dernière.
On a :

- (1) $\Leftrightarrow$ $(y - y_2 \geqslant ty_1 - ty_2)$ $\Leftrightarrow$ $(y - y_2 \geqslant t(y_1 - y_2))$ $\Leftrightarrow$ $\left(y - y_2 \geqslant \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2}.(y_1 - y_2)\right)$ et en divisant par $(x - x_2)$ qui est strictement négatif, on obtient : (1) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{y - y_2}{x - x_2} \leqslant \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right) \Leftrightarrow$ (3).

- $(1) \Leftrightarrow (-y \leqslant -ty_1 - (1-t)y_2) \Leftrightarrow (y_1 - y \leqslant (1-t)(y_1 - y_2))$.

  Or on a : $1 - t = 1 - \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_2}$.

  Nous obtenons donc : $(1) \Leftrightarrow \left(y_1 - y \leqslant \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_2}.(y_1 - y_2)\right)$.

  Divisons l'inéquation de la ligne précédente par $x_1 - x$ qui est strictement négatif, nous obtenons :

  $(1) \Leftrightarrow \left(\dfrac{y_1 - y}{x_1 - x} \geqslant \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right) \Leftrightarrow (2)$.

- Enfin, puisque :$\begin{cases} (1) \Leftrightarrow (2) \\ (1) \Leftrightarrow (3) \end{cases}$ , nous en déduisons que : $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$.

■

Interprétation géométrique : Reprenons le shéma du paragraphe VI) 1) b).

- L'inégalité (1) signifie que la fonction $f$ est concave sur $I$ ou encore que le point $M$ est situé "au dessus" du point $M'$.
- L'inégalité (2) signifie que la pente de la droite $(MM_1)$ est supérieure ou égale à la pente de la droite $(M_1M_2)$.
- L'inégalité (3) signifie que la pente de la droite $(M_1M_2)$ est supérieure ou égale à la pente de la droite $(MM_2)$.

**b) Seconde caractérisation** Soit $a$ un élément de $I$. Notons $\varphi_a$ l'application de $I - \{a\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Remarquons que $\varphi_a(x)$ représente le taux d'accroissement de la fonction $f$ entre $a$ er $x$.

**Proposition 14** ($f$ *est concave sur* $I$) $\Leftrightarrow$ ($\forall a \in I$, $\varphi_a$ *est décroissante sur* $I - \{a\}$).

**Preuve.** Notons $\delta(u, v) = \dfrac{f(u) - f(v)}{u - v}$ le taux d'accroissement de la fonction $f$ entre $u$ et $v$.
On a : $\delta(u, v) = \delta(v, u)$.

- Démontrons la condition mécessaire : supposons que la fonction $f$ est concave sur $I$ et démontrons que la fonction $\varphi_a$ est décroissante sur $I - \{a\}$.

  Soient $x_1$ et $x_2$ deux éléments de $I$ tels que $x_1 < x_2$.

  Posons : $x = tx_1 + (1-t)x_2$ avec $t \in ]0; 1[$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ et $y = f(x)$.

  Puisque la fonction $f$ est concave sur $I$ on a : $y \geqslant ty_1 + (1-t)y_2$.

  D'après la propriété vue au 1), on a :$\begin{cases} \dfrac{y_1 - y}{x_1 - x} \geqslant \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} : (2) \\ \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \geqslant \dfrac{y - y_2}{x - x_2} : (3) \end{cases}$ , soit encore : $\begin{cases} \delta(x_1, x) \geqslant \delta(x_1, x_2) : (2) \\ \delta(x_1, x_2) \geqslant \delta(x, x_2) : (3) \end{cases}$ .

  Pour montrer que la fonction $\varphi_a$ est décroissante sur $I - \{a\}$, on prend $x$ et $x'$ deux éléments de $I - \{a\}$ tels que $x < x'$ et on va montrer que l'on a : $\varphi_a(x') \leqslant \varphi_a(x)$.

  Nous devons distinguer trois cas :

  Cas 1 : $a < x < x'$

  Alors $a$, $x$ et $x'$ jouent le rôle de $x_1$, $x$ et $x_2$ et on a d'après la relation (2) : $\delta(a, x) \geqslant \delta(a, x')$ soit encore : $\varphi_a(x) \geqslant \varphi_a(x')$.

  Cas 2 : $x < a < x'$

Alors ce sont $x$, $a$ et $x'$ qui jouent le rôle de $x_1$, $x$ et $x_2$ et on a d'après les relations (3) et (2) : $\varphi_a(x') = \delta(a,x') \leqslant \delta(x,x') \leqslant \delta(a,x) = \varphi_a(x)$.

Cas 3 : $x < x' < a$

De même, d'après la relation (3), on a : $\delta(a,x') \leqslant \delta(a,x)$ soit encore : $\varphi_a(x') \leqslant \varphi_a(x)$.

- Inversement, supposons que : $\forall a \in I$, $\varphi_a$ est décroissante sur $I - \{a\}$.

  Soient $x_1$ et $x_2$ deux éléments de $I$ tels que $x_1 \neq x_2$ et soit $x = tx_1 + (1-t)\,x_2$ avec $t \in ]0;1[$; il faut montrer que l'on a : $y \geqslant ty_1 + (1-t)y_2$.

  Supposons que : $x_1 < x_2$ (la démonstration serait analogue dans le cas $x_1 > x_2$). On a donc : $x_1 < x < x_2$.

  D'après la première caractérisation, il suffit de démontrer la relation (3).

  Comme $\varphi_{x_2}$ est décroissante sur $I - \{x_2\}$, on en déduit que : $\varphi_{x_2}(x_1) \geqslant \varphi_{x_2}(x)$ et on obtient donc la relation (3).

■

**Remarque 16** *Le taux d'accroissement de $(-f)$ étant l'opposé de celui de $f$, on en déduit donc que :*
$(f$ *est convexe sur* $I) \Leftrightarrow (-f$ *est concave sur* $I) \Leftrightarrow (\forall a \in I,\ \varphi_a$ *est croissante sur* $I - \{a\})$.

### c) Troisième caractérisation

**Proposition 15** *Si $f$ est dérivable sur $I$,*
$(f$ *est concave sur* $I) \Leftrightarrow (\forall a, b \in I,$ *on a :* $f(b) - f(a) \geqslant (b-a)\,f'(b))$.

**Preuve.** Soit $a \in I$, posons : $\varphi_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Puisque la fonction $f$ est dérivable sur $I$, alors la fonction $\varphi_a$ est dérivable sur $I - \{a\}$ puisque la fonction $\varphi_a$ est le quotient de fonctions dérivables et on a : $\varphi'_a(x) = \dfrac{(x-a)\,f'(x) - (f(x)-f(a))}{(x-a)^2}$
$= \dfrac{(x-a)\,f'(x) - f(x) + f(a)}{(x-a)^2}$.

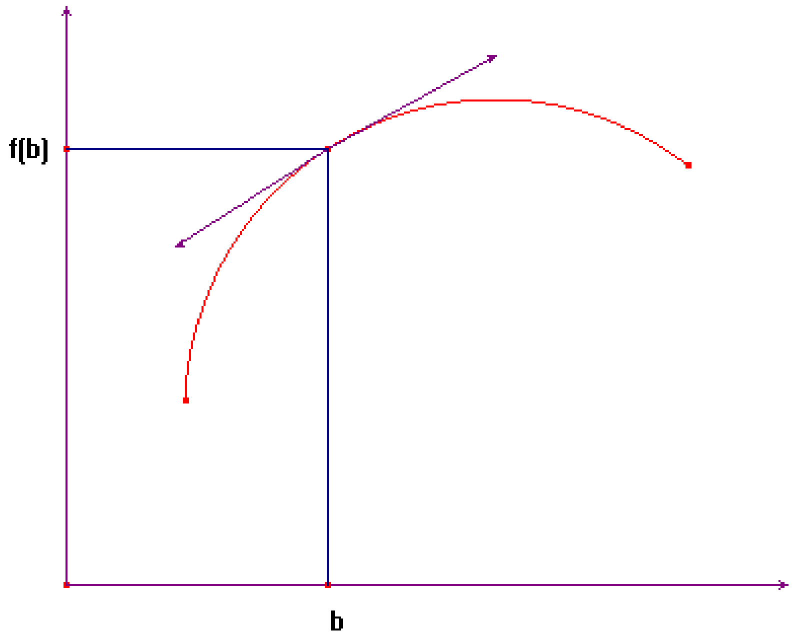
Par ailleurs, nous savons qu'une fonction dérivable est décroissante si et seulement si sa dérivée est négative.

D'après le seconde caractérisation, nous avons :
$(f$ est concave sur $I) \Leftrightarrow (\forall a \in I,\ \varphi_a$ est décroissante sur $I - \{a\})$.
Par suite, $(f$ est concave sur $I) \Leftrightarrow (\forall a \in I,\ \forall x \in I - \{a\}$ on a : $\varphi'_a(x) \leqslant 0)$.
Donc : $(f$ est concave sur $I) \Leftrightarrow (\forall a \in I,\ \forall x \in I - \{a\}$ on a : $(x-a)\,f'(x) - f(x) + f(a) \leqslant 0)$.
Deux cas se présentent alors :

- Si $b \in I - \{a\}$ : alors on remplace $x$ par $b$ dans l'inégalité ci-dessus et on obtient le résultat cherché;
- Si $b = a$, alors on a : $\begin{cases} f(b) - f(a) = 0 \\ (b-a)\,f'(b) = 0 \end{cases}$ et l'inégalité demandée est encore vérifiée.

■

Interprétation graphique :
Dans l'inégalité $f(b) - f(a) \geqslant (b-a)\,f'(b)$, remplaçons $a$ par $x$; nous obtenons :
$f(b) - f(x) \geqslant (b-x)\,f'(b)$ soit encore : $f(b) + (x-b)f'(b) \geqslant f(x)$.
L'équation : $y = f(x)$ est une équation de la courbe représentative de la fonction $f$;
l'équation : $y = f(b) + (x-b)f'(b)$ est une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f$ au point d'abscisse $b$.
La courbe représentative de la fonction $f$ est donc située "au dessous de sa tangente".




Conséquence : maximum local d'une fonction concave sur un intervalle ouvert.

Nous avons vu au chapitre 2, dans le paragraphe III) que si la fonction $f$ présente un extrémum local en $b$, et si $f$ est dérivable en $b$, alors on a $f'(b) = 0$ (condition du premier ordre). Nous avions alors remarqué que cette condition n'était pas suffisante pour assurer l'existence d'un extrémum local au point $b$.

Supposons maintenant que la fonction $f$ soit concave sur un intervalle ouvert $I$.

Dans ce cas, on a donc : $(\forall a \in I$, on a : $f(b) - f(a) \geqslant (b-a)\, f'(b))$.

Si on a : $f'(b) = 0$, alors la relation précédente nous donne : $(\forall a \in I$, on a : $f(b) \geqslant f(a))$ et par conséquent la fonction $f$ possèdera un maximum local en b. La condition du premier ordre devient alors suffisante.

Conclusion :

Si la fonction $f$ est concave et dérivable sur l'intervalle ouvert $I$ et si $b \in I$, alors :

$$(f \text{ admet un maximum local en } b) \Leftrightarrow (f'(b) = 0)$$

*Pour rechercher un maximum local lorsqu'une fonction est concave et dérivable sur un intervalle ouvert $I$, la condition du premier ordre $f'(b) = 0$ est donc suffisante.*

*De même, si on recherche un minimum local et si la fonction est convexe et dérivable sur un intervalle ouvert $I$, la condition du premier ordre est suffisante.*

### d) Quatrième caractérisation

**Proposition 16** *Si la fonction $f$ est dérivable sur $I$,*
*$(f$ est concave sur $I) \Leftrightarrow ($la fonction dérivée $f'$ est décroissante sur $I)$.*

**Preuve.**

- Supposons que la fonction $f$ est concave sur $I$ et montrons que la fonction $f'$ est décroissante sur $I$ : si $x_1$ et $x_2 \in I$ sont tels que $x_1 < x_2$, montrons que : $f'(x_1) \geqslant f'(x_2)$.

  Posons $x = tx_1 + (1-t)\, x_2$ avec $t \in ]0;1[$ et notons $y = f(x)$, $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Alors, puisque $f$ est concave sur $I$, on a : $y \geqslant ty_1 + (1-t)y_2$ ainsi que les inégalités (2) et (3) de la première caractérisation, c'est à dire : $\delta\,(x_1, x) \geqslant \delta\,(x_1, x_2) \geqslant \delta\,(x, x_2)$.

Si on fait tendre $x$ vers $x_2$, alors par définition du nombre dérivé, on a $\delta(x, x_2)$ qui tend vers $f'(x_2)$ et par passage à la limite dans la seconde inégalité ci-dessus, on obtient : $f'(x_2) \leqslant \delta(x_1, x_2)$.

Si cette fois on fait tendre $x$ vers $x_1$, alors $\delta(x_1, x)$ tend vers $f'(x_1)$ et par passage à la limite dans le première inégalité ci-dessus, on obtient : $\delta(x_1, x_2) \leqslant f'(x_1)$.

Finalement on a : $f'(x_2) \leqslant f'(x_1)$ et par suite la fonction $f'$ est décroissante sur $I$.

- Réciproquement, si la fonction $f'$ est décroissante sur $I$, montrons qu'alors la fonction $f$ est concave sur $I$.

  S $a$ et $b \in I$, vérifions que : $f(b) - f(a) \geqslant (b-a) f'(b)$, on en déduira donc grâce à la troisième caractérisation que la fonction $f$ est concave sur $I$.

  <u>$1^{er}$ cas</u> : si $a = b$ il est trivial que la propriété précédente est vérifiée.

  <u>$2^{ème}$ cas</u> : si $a \neq b$, comme la fonction $f$ est dérivable sur $I$, alors $f$ sera continue sur $I$, et on pourra appliquer l'inégalité des accroissements finis : $\exists c \in ]a, b[$ (ou $]b, a[$) tel que :

  $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

  - <u>si $a < b$</u>, alors on a : $c < b$ et puisque la fonction $f'$ est décroissante, on en déduit que : $f'(c) \geqslant f'(b)$ et par suite on aura : $(b-a) f'(c) \geqslant (b-a) f'(b)$;
  - <u>si $a > b$</u>, alors on a : $c > b$ et puisque la fonction $f'$ est décroissante, on en déduit que : $f'(c) \leqslant f'(b)$ et par suite on aura : $(b-a) f'(c) \geqslant (b-a) f'(b)$;
  - Par conséquent, dans tous les cas on aura : $(b-a) f'(c) \geqslant (b-a) f'(b)$ et par suite : $f(b) - f(a) \geqslant (b-a) f'(b)$.

■

#### e) Cinquième caractérisation

**Proposition 17** *Si la fonction $f$ est deux fois dérivable sur l'intervalle $I$,*
*($f$ est concave sur $I$) $\Leftrightarrow$ ($\forall x \in I$, on a : $f''(x) \leqslant 0$)*

**Preuve.** Ce résultat se déduit de façon immédiate de la quatrième caractérisation car $f'$ est décroissante sur $I$ si et seulement si $f'' \leqslant 0$ sur $I$. ■

**Remarque 17** *Nous avons des propriétés semblables pour les fonctions convexes sur $I$ :*

$$
\begin{aligned}
(f \text{ est convexe sur } I) &\Leftrightarrow (\forall x \in I, \text{ on a : } f''(x) \geqslant 0) \\
&\Leftrightarrow (f' \text{ est décroissante sur } I) \\
&\Leftrightarrow (\forall a, b \in I, \text{ on a : } f(b) - f(a) \leqslant (b-a) f'(b)).
\end{aligned}
$$

### 2) Exemples

**a) Fonction logarithme népérien : $f(x) = \ln x$** La fonction $f$ est deux fois dérivable sur l'intervalle $I = ]0, +\infty[$ et $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} \leqslant 0$ pour tout $x \in I$. Par conséquent la fonction $f$ est concave sur $I = ]0, +\infty[$.

**b) Cas de la fonction exponentielle de base $a$ : $f(x) = a^x$** On a : $f(x) = e^{x \ln a}$. Cette fonction est deux fois dérivable sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ et on a : $f''(x) = (\ln a)^2 e^{x \ln a} \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$; par conséquent, la fonction $f$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

**c) Cas de la fonction puissance : $f(x) = x^{\alpha}$ (avec $\alpha \geqslant 0$)** La fonction $f$ est deux fois dérivable sur l'intervalle $I = ]0, +\infty[$ et $f''(x) = \alpha\,(\alpha - 1)\,x^{\alpha-2}$. On a : $x^{\alpha-2} > 0$ pour tout $x \in I$.

Nous avons donc quatre cas :

- Si $0 < \alpha < 1$ : on a donc $f''(x) < 0$ pour tout $x \in I$ et par suite la fonction $f$ est concave sur $I = \mathbb{R}^{*+}$;
- Si $\alpha = 0$ : la fonction $f$ est une fonction constante égale à 1 donc elle est à la fois concave et convexe sur $I = \mathbb{R}^{*+}$;
- Si $\alpha = 1$ : la fonction $f$ est la fonction polynôme du premier degré : $f(x) = x$, elle est donc à la fois concave et convexe sur $I = \mathbb{R}^{*+}$;
- Si $\alpha > 1$ : on a donc $f''(x) > 0$ pour tout $x \in I$ et par suite la fonction $f$ est convexe sur $I = \mathbb{R}^{*+}$.

**d) Autre exemple : $f(x) = e^x + x\,(\ln x - 1 - e)$** Montrons que cette fonction présente un minimum local en 1.

La fonction $f$ est deux fois dérivable sur $I = \mathbb{R}^{*+}$ car elle est composée de la fonction logarithme, exponentielle et de fonctions polynômes.

On a : $f'(x) = e^x + \ln x - 1 - e + 1 = e^x + \ln x - e$ et $f''(x) = e^x + \dfrac{1}{x} > 0$ pour tout $x \in I$. Par conséquent la fonction $f$ est convexe sur l'intervalle $I$.

De pus, $f'(1) = e + \ln 1 - e = 0$, par conséquent, la fonction $f$ présente un minimum local en 1.