Introduction aux fonctions numériques

1 Notion générale de fonction

1.1 Définitions et vocabulaire

Examinons d'abord la notion générale de fonction d'un ensemble dans un autre.

Définition 1.1.1 *Soient deux ensembles X et Y. Se donner une* **fonction** *de X dans Y, c'est faire correspondre à chaque élément de X un élément unique de Y, noté $f(x)$.*

On emploie aussi le mot « **application** » comme synonyme de « fonction » (dans le sens où nous venons de définir cette notion).

1.1.2 Vocabulaire

- On dira que les fonctions f et g de X dans Y sont **égales** si pour tout $x \in X$, on a $f(x) = g(x)$. On note alors $f = g$.

- L'ensemble X s'appelle **l'ensemble de départ** de f, et Y s'appelle son **ensemble d'arrivée**. On dit encore que$f$ est **définie sur** X, **à valeurs dans** Y, et pour indiquer cela on note $f : X \to Y$.

- L'élément $f(a)$ (où $a \in X$) s'appelle **l'image** de a par f. Si $b \in Y$ est l'image d'un élément $a \in X$ (c'est à dire si $b = f(a)$), on dit que a est **un antécédent** de b par f. Notons tout de suite qu'un élément b de Y peut avoir un ou plusieurs antécédents, ou n'en avoir aucun.

- L'ensemble des images de tous les éléments de X est une certaine partie de Y (cela peut parfois être Y tout entier). On l'appelle **l'image de** f, et on la note $f(X)$. On peut dire aussi que c'est l'ensemble des éléments de Y ayant au moins un antécédent par f. En notation mathématique :

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \in Y \mid (\exists x \in X)\ y = f(x)\}.$$

- Plus généralement on peut définir l'image par f d'une partie A de X, par

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \mid (\exists x \in A)\ y = f(x)\}\,.$$

  On peut aussi ne considérer la correspondance entre x et $f(x)$ que pour les seuls éléments de A, ce qui nous donne une fonction de A dans Y. Cette fonction s'appelle la **restriction de f à A**. On la note en principe $f|A$ (mais très souvent, par commodité, on la note simplement f).

- Inversement, on peut se donner au départ une fonction g de A dans X (où A est une partie stricte de X — c'est à dire que A n'est pas X tout entier), puis définir une fonction f de X dans Y, de façon que $f|A = g$. On dit qu'on a **prolongé** g à tout X, ou encore que f est un **prolongement** de g. Notons que la plupart du temps il y a plusieurs façons de prolonger la fonction g à X tout entier.

1.1.3 Exemples

Soit X l'ensemble des étudiants de L1 à Paris 13 cette année. Examinons quelques correspondances qu'on pourrait définir à partir des éléments de X.

Exemple 1 Pour chaque étudiant $x \in X$, soit $f(x)$ le nombre entier désignant l'année de sa naissance (dans le calendrier grégorien, qui est celui que nous utilisons le plus souvent !). La correspondance entre x et $f(x)$ est bien une fonction définie sur X.
On peut restreindre cette fonction à une partie de X, par exemple aux étudiants d'un groupe donné. On peut la prolonger à l'ensemble U de tous les étudiants de l'université, en gardant la même définition (année de naissance) pour tous les étudiants. Mais on pourrait aussi (même si c'est une drôle d'idée) définir sur U une fonction F en disant que $F(x)$ est l'année de naissance, quand x est un étudiant de $L1$, mais que pour les autres, $F(x)$ désigne l'année d'entrée à l'Université. C'est aussi un prolongement de f à U, même s'il est moins naturel que le premier.

Maintenant, quel est l'ensemble d'arrivée Y de f ? On voit tout de suite qu'on peut le choisir de plusieurs façons : $\mathbb{N}$, ou $\mathbb{Z}$, ou l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 3750, ou l'ensemble des entiers entre 1950 et 1990 ... Pour tous ces choix de Y, l'image de f n'est certainement pas Y tout entier. On pourrait aussi choisir Y égal à l'ensemble des années de naissance des étudiants de X : autrement dit on peut choisir Y de façon que $f(X) = Y$.
Cependant, quel que soit le choix de Y, un fait demeure : certains entiers sont l'image de plusieurs éléments de X (beaucoup d'étudiants sont nés une même année). Pour cette raison, la correspondance qui à une année associe les étudiants nés cette année-là n'est pas une fonction de Y dans X : la correspondance qui va d'un étudiant à son année de naissance est définie de manière unique, mais pas la correspondance réciproque (qui va de l'année de naissance à l'étudiant).

Exemple 2 Définissons la correspondance qui à un étudiant $x \in X$ associe son frère. On s'aperçoit immédiatement que cette correspondance est mal définie :« *son* frère » ... en a-t-il, et si oui, en a-t-il un seul ? C'est un exemple de mauvaise définition.

Corrigeons la définition en disant qu'à un étudiant $x \in X$ on associe *ses* frères, s'il en a. Là, on a une correspondance bien définie entre X et un certain ensemble Y (on peut prendre Y égal à l'ensemble des frères de tous les étudiants de X). Mais ce n'est pas une fonction définie sur X, puisque à certains éléments de X ne correspond aucun élément de Y, et à certains autres correspondent plusieurs $y \in Y$.

Exemple 3 Associons maintenant à chaque étudiant $x \in X$ son numéro de carte d'étudiant, que nous désignerons par $C(x)$. Chaque étudiant a un numéro de carte unique : C est bien une fonction définie sur X.
On peut, comme toujours, choisir l'ensemble d'arrivée Y de C de plusieurs façons ; si on choisit par exemple $Y = \mathbb{N}$, l'image de C n'est pas égale à l'ensemble Y. On peut choisir Y égal à l'ensemble des numéros de carte des étudiants de L1 : dans ce cas $f(X) = Y$. Fixons-nous à ce choix.

Si on se donne un élement de Y (un numéro de carte existant), il existe un étudiant et un seul qui correspond à ce numéro. Concrètement, si vous connaissez le numéro de carte d'un étudiant vous pouvez obtenir son identité. On peut donc ici « renverser le sens » de la correspondance, en associant à chaque élément y de Y l'étudiant propriétaire de la carte de numéro y. On a défini ainsi une fonction de Y dans X. Appelons-la E : on voit que E associe à chaque $y \in Y$ *l'unique élément x de X tel que $y = C(x)$*. La fonction $E : Y \to X$ ainsi définie s'appelle la **fonction réciproque** de la fonction $C : X \to Y$.

1.1.4 Exercice : Formuler en écriture mathématique le fait que :

1) Deux fonctions f et g de X dans Y ne sont pas égales.
2) b élément de Y n'est pas une image de $f : X \to Y$.
2) Tous les éléments de Y sont des images par $f : X \to Y$.
3) Tout couple (x, x') d'éléments distincts de X ont des images distinctes dans Y.

1.2 Injections, bijections, fonction réciproque

L'Exemple 3 ci-dessus appelle une généralisation :

Définition 1.2.1

1. *Soit f une fonction de X dans Y. On dit que f est* **injective** *(ou que c'est une* **injection***) si des éléments distincts de X ont toujours des images distinctes.*
   En notation mathématique, f est injective si on a

$$(\forall\, x, x' \in X) \quad x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x').$$

2. *Si $f : X \to Y$ est injective, et si de plus $Y = f(X)$, on dit que f est* **bijective** *ou encore que c'est une* **bijection** *de X* **sur** *Y.*

La fonction f de l'Exemple 1 ci-dessus n'est pas injective, la fonction C de l'Exemple 3 est injective. Remarquons que si $f : X \to Y$ est simplement injective, on peut au besoin modifier le choix de l'ensemble d'arrivée en prenant $Y = f(X)$, de façon à obtenir une bijection. Autrement dit, une injection définie sur X est toujours une bijection de X sur $f(X)$.

Remarque Si X et Y sont des ensembles finis, il ne peut exister de bijection de l'un sur l'autre que si ces deux ensembles ont le même nombre d'éléments. Cette propriété est utilisée pour étendre la notion de « nombre d'élément » à des ensembles infinis : on dira que deux ensembles infinis ont même **même cardinal** s'il existe une bijection de l'un sur l'autre. Notons que tous les ensembles infinis n'ont pas même cardinal, il existe des infinis « plus ou moins gros » : ainsi $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ n'ont pas le même cardinal, car on peut démontrer qu'on ne peut pas les mettre en bijection. Le cardinal infini représentant le nombre d'éléments de $\mathbb{R}$ (on l'appelle le **cardinal du continu**) est strictement plus grand que celui qui représente le nombre d'éléments de $\mathbb{N}$ (on l'appelle le **cardinal dénombrable** et on dit qu'un ensemble est **dénombrable** si on peut le mettre en bijection avec $\mathbb{N}$).

Fonction réciproque

Si f est une bijection de X sur Y, à chaque $y \in Y$ correspond un unique élément $x \in X$ tel que $y = f(x)$. Cela définit une fonction de Y dans X, appelée **fonction réciproque** de f. On la note f^{-1}.

Remarquons que f^{-1} est aussi une bijection de Y sur X et que $(f^{-1})^{-1} = f$. En effet

- $f^{-1} : Y \to X$ est surjective car pour tout élément $x \in X$, l'élément $y = f(x)$ de Y est tel que $f^{-1}(y) = x$. De plus $f^{-1} : Y \to X$ est injective car si on a deux éléments de Y distincts y et y', on a forcément $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y')$ sinon cela voudrait dire qu'on a à la fois $y = f(x)$ et $y' = f(x)$, ce qui est impossible puisque $y \neq y'$.
- $(f^{-1})^{-1} : X \to Y$ est telle que $(f^{-1})^{-1}(x) = y \iff x = f^{-1}(y) \iff f(x) = y$ ainsi $(f^{-1})^{-1} = f$.

Résumons ce que nous venons de démontrer :

Proposition 1.2.2 *Si f est une bijection d'un ensemble X sur un ensemble Y, il existe une fonction $f^{-1} : Y \to X$ (appelée* **fonction réciproque** *de f) définie par*

$$(\forall\, x \in X)\,(\forall\, y \in Y) \quad x = f^{-1}(y) \iff y = f(x).$$

De plus f^{-1} est une bijection de Y sur X et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Exercice Démontrer que si l'équivalence ci-dessus définit une fonction $f^{-1} : Y \to X$, alors nécessairement f est une bijection de X sur Y.

Exemple Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + 3$. Pour chaque $y \in \mathbb{R}$ il existe un unique x tel que $y = f(x)$: en effet on calcule facilement que $y = 2x + 3$ si et seulement si $x = \dfrac{y-3}{2}$. Donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même ; sa fonction réciproque est aussi une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, qui peut s'écrire $f^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{2}$, ou encore $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$, ce qui revient au même.

1.3 Composition de fonctions

Considérons 3 ensembles X, Y et Z, et soient deux fonctions $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$. A chaque élément $x \in X$ on peut associer l'élément de Z défini par $z = g(f(x))$. On a ainsi obtenu une fonction de Y dans Z, notée $g \circ f$; on l'appelle la **composée** de f et de g.

Remarques

• Sous les hypothèses ci-dessus pour f et g, la fonction $g \circ f$ est toujours définie mais en général $f \circ g$ n'existe pas du tout. Prenons par exemple la fonction $f : X \to \mathbb{N}$ définie comme dans l'Exemple 1 (année de naissance d'un étudiant), et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction définie par $g(n) = n + 10$. La fonction $g \circ f$ a un sens : elle associe à chaque étudiant l'année où il avait 10 ans. Mais on ne voit pas du tout quel sens on pourrait donner à $f \circ g$!

• Si $X = Z$, alors les deux composées $g \circ f$ et $f \circ g$ sont définies. Notons cependant qu'en général ces deux fonctions sont différentes. Par exemple :

1. Soit X l'ensemble des êtres humains. Définissons les deux fonctions suivantes de X dans lui-même : $p(x)$ est le père de x et $m(x)$ est la mère de x. Les fonctions $m \circ p$ et $p \circ m$ existent-elles ? Si oui, sont-elles égales ?

2. Considérons les deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 2$. Comparer $g \circ f$ et $f \circ g$. Soit maintenant $h(x) = x^3$; comparer $f \circ h$ et $h \circ f$.

1.3.1 Exercice : Composition d'injections, de surjections et de bijections

Soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux fonctions, montrer que :
1) Si f et g sont deux injections, alors $g \circ f$ est une injection.
2) Si f et g sont deux surjections, alors $g \circ f$ est une surjection.
3) Si f et g sont deux bijections, alors $g \circ f$ est une bijection.

Montrer que les énoncés réciproques sont faux (des exemples suffisent.. pourquoi...). Montrer alors que
1) Si $g \circ f$ est une injection alors f est une injection.
2) Si $g \circ f$ est une surjection alors g est une surjection.
3) Si $g \circ f$ est une bijection alors ...(compléter)... .

1.3.2 Composition d'une bijection avec sa réciproque

Soit f une bijection de X sur Y, f^{-1} sa réciproque. Alors, pour tout $x \in X$, si $y = f(x)$ on a $x = f^{-1}(y)$. Donc $f^{-1}(f(x)) = x$. Par conséquent $f^{-1} \circ f$ est la fonction de X dans X qui à $x \in X$ associe x lui-même : on appelle cette fonction **l'identité** de X, et on la note Id_X.
D'autre part, si $y \in Y$ et $x = f^{-1}(y)$, alors $f(x) = y$ donc pour tout $y \in Y$, $f(f^{-1}(y)) = y$. On obtient la fonction identité de Y.
Pour résumer :

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X \text{ et } f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_Y.$$

En fait, ces deux dernières égalités caractérisent une bijection et sa fonction réciproque. Démontrer la proposition suivante :

Proposition 1.3.3 *Soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ deux fonctions telles que*

$$g \circ f = Id_X \text{ et } f \circ g = Id_Y.$$

alors f et g sont des bijections, g est la bijection récipoque de f et f est la bijection récipoque de g (i. e; $g = f^{-1}$ et $f = g^{-1}$).

2 Fonctions numériques

2.1 Généralités

2.1.1 Une **fonction numérique** $f : X \to Y$ est une fonction dont l'ensemble de départ X et l'ensemble d'arrivée Y sont des parties de $\mathbb{R}$ ([1]). on dit aussi que f est une fonction **d'une variable réelle** — à **valeurs réelles** ([2])

• Les fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$, les fonctions de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = 1/x$, $g(x) = 1/x^2$... et plus généralement les fonctions d'expression une fraction rationnelle, $F(x) = P(x)/Q(x)$ c'est à dire le quotient de deux fonctions polynomes sont des fonctions numériques.

• Les fonctions de la variable réelles trigonométriques : sin , cos, tan ... les fontions exp, ln .... sont des fonctions numériques.

• La fonction $E(x)$ (partie entière de x) définie au chapitre 3 est encore un autre type de fonction numérique.

• Une autre façon de se donner une fonction numérique est de la définir « par morceaux » , c'est à dire de définir $f(x)$ de plusieurs façons, suivant les valeurs de x. Par exemple (tracer leur graphe) :

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 2 \\ x - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2.1.2 Fonction réciproque d'une fonction numérique.

Soit f une fonction numérique injective, définie sur $X \subset \mathbb{R}$. Comme on a vu plus haut, si on pose $Y = f(X)$, f est une bijection de X sur Y ; elle admet donc une fonction réciproque f^{-1}, qui est une bijection de Y sur X. Regardons quelques exemples.

• On a déjà étudié l'exemple de $f(x) = 2x + 3$ pour $x \in \mathbb{R}$, qui est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même. Revoyons comment on explicite f^{-1} : si $y = 2x + 3$, on peut alors exprimer x en fonction de y par $x = \dfrac{y-3}{2}$. Donc $f^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{2}$, c'est à dire que f^{-1} est la fonction qui à un réel x associe $\dfrac{x-3}{2}$.

Dans cet exemple Expliciter f^{-1}, c'est donc prendre l'expression qui définit $y = f(x)$, et « exprimer x en fonction de y » — ou encore résoudre l'équation $y = f(x)$, où x est l'inconnue, en fonction de y considéré comme paramètre de cette équation. On obtient une expression définissant une fonction, dont la variable est y, et dont la valeur est désignée par x ; souvent on rechange alors cette expression, en appelant x la variable — mais il n'y a aucune obligation, aucune règle mathématique ne dit que la variable d'une fonction doit toujours s'appeler x, ni que la lettre y doit toujours désigner la valeur de la fonction !

[1]Puisque $\mathbb{N}$ est une partie de $\mathbb{R}$, on peut considérer les suites réelles comme des fonctions numériques. Elles ont été étudiées au chapitre 3. Ici, nous nous occuperons plutôt des fonctions définies sur une partie X de $\mathbb{R}$ constituée d'une réunion d'intervalles, ouverts ou fermés, mais non réduits à un point.

[2]de la même manière, on parle de fonction à variable entière, à variable complexe, ou à plusieurs variables ... et à valeurs entières, complexes, vectorielles, etc.

• L'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ n'est pas injective. Mais on peut considérer sa restriction à un intervalle, le plus grand possible, sur lequelle elle est injective : par exemple $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ (on aurait pu prendre aussi $]-\infty, 0]$). Cette restriction (appelons-la f aussi) est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur lui-même, donc elle admet une réciproque f^{-1}.
Pour expliciter cette réciproque, on « résoud en x » l'équation $y = x^2$ dans $\mathbb{R}^+$: bien sûr on trouve $x = \sqrt{y}$. La fonction réciproque de f est donc définie par $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

• Cela dit, il n'est pas toujours possible de « résoudre en x » l'équation $y = f(x)$!!! Par exemple pour la bijetion $f :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}, x \mapsto \tan x$, la fonction réciproque de f est alors définie avec une nouvelle notation : $\mathrm{Arctan} : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[, x \mapsto \mathrm{Arctan}\, x$.

• **Exercices**

1. Donner la fonction réciproque de $f(x) = 1 - x$ (définie sur $\mathbb{R}$).
2. Soit $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$. Choisir le "bon" ensemble de départ pour f, et donner son image. Montrer que f admet une fonction réciproque, qu'on explicitera.
3. A quel intervalle peut-on restreindre la fonction $f(x) = \sin x$ pour pouvoir parler d'une fonction réciproque de f (on prendra par exemple un intervalle contenant 0, le plus grand possible) ? Quels seront alors l'ensemble de départ et l'image de f^{-1} ?

2.1.3 Domaine de définition

Comme dans l'exercice 2 ci-dessus, on se donne souvent une *formule* $y = A(x)$ exprimant un réel y au moyen d'un réel x. On se demande alors souvent quelle est la partie X de $\mathbb{R}$, la plus grande possible, sur laquelle cette expression est définie[3]. La formule en question définit alors une fonction de X dans $\mathbb{R}$. On dit que ce X est le **domaine de définition** de l'expression $y = A(x)$.

Exercice Trouver le domaine de définition des expressions suivantes :

$$y = \sqrt{x-1}, \quad y = \sqrt{-x}, \quad y = \sqrt{x^2}, \quad y = (\sqrt{x})^2, \quad y = \ln(\sin x), \quad y = \frac{1}{\sin x}.$$

Remarquez que la troisième et la quatrième expression ne définisent pas la même fonction.

2.1.4 Opérations sur les fonctions

Etant donné deux fonctions numériques f_1 et f_2, définies sur une même partie de X, la correspondance qui associe à $x \in X$ le nombre réel $f(x) + g(x)$ est une fonction numérique g, définie sur X. On dira que la fonction g est la somme de f_1 et f_2, et on écrira $g = f_1 + f_2$.
De même on peut définir sur X la fonction $h = f_1 f_2$, produit de f_1 et f_2, par $h(x) = f_1(x) f_2(x)$, et sur $X' = \{x \in X | f_2(x) \neq 0\}$ la fonction f_1/f_2.
On peut aussi considérer la composition de deux fonctions numériques comme une opération entre ces deux fonctions.
Dans tous ces cas, lorsque les fonctions concernées ne sont pas définies sur tout $\mathbb{R}$, il faut être attentif au domaine de définition de la fonction obtenue. On réfléchira par exemple aux cas suivants :

[3] C'est à dire que pour chaque $x \in X$, l'expression $y = A(x)$ définit un et un seul réel y.

Exercice Soient $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
1) Quels sont les domaines de définition de $f+g$, fg, f/g, g/f, $f \circ g$ et $g \circ f$?
2) Remarquez que pour g/f il y a deux réponses possibles. Laquelle est la bonne ? Ca se discute !

2.2 Graphe d'une fonction

Définition 2.2.1 *Soit f une fonction numérique, définie sur $X \subset \mathbb{R}$. On appelle* **graphe** *de f la partie G du plan $\mathbb{R}^2$ définie par*

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X \text{ et } y = f(x)\right\}.$$

On peut dire encore que G est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$, pour tous les $x \in X$.
Par définition de la notion de fonction, cet ensemble G a la propriété suivante : pour toute droite D parallèle à l'axe Oy passant par un point d'abscisse $x \in X$, D coupe G en exactement un point.
Si de plus f est injective, G aura la propriété suivante : toute droite parallèle à l'axe Ox coupe G en au plus un point.
Réciproquement, si G possède les deux propriétés décrites ci-dessus, c'est la graphe d'une fonction numérique injective.
L'image $f(X)$ se représente sur l'axe Oy, en projetant G sur cet axe parallèlement à Ox. Ainsi la représentation schématique du graphe d'une fonction peut servir à connaître diverses propriétés de cette fonction.

Exercices

1. Dans un repère orthonormé, à quelles propriétés de symétrie du graphe de f correspondent les propriétés « f paire » et « f impaire » ?

2. Comment détermine-t-on graphiquement l'image par f d'une partie A de X ? Et si B est-une partie de $\mathbb{R}$, comment détermine-t-on graphiquement $\{x \in X \mid f(x) \in B\}$[4]?
Application : à l'aide du graphe de $f(x) = x^2$, déterminer $f(A)$, où $A = [-1, 4]$. Comparer avec l'intervalle $[f(-1), f(4)]$. Déterminer graphiquement $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [1,2]\}$.

3. Indiquer comment, à partir du graphe de f, on peut construire l'image de x par $f \circ f$?

Graphes d'une bijection et de sa réciproque

Considérons une fonction numérique injective f définie sur $X \subset \mathbb{R}$, et soit $Y = f(X)$. Alors f admet une fonction réciproque $f^{-1} : Y \to X$.
Soient $a \in X$ et $b = f(a)$. Le point (a, b) appartient au graphe G de f. Mais on a aussi $a = f^{-1}(b)$, donc le point (b, a) appartient au graphe H de f^{-1}.
Réciproquement, si le point (c, d) appartient à H, le point (d, c) appartient à G.

[4]Cette partie, qui existe toujours, se note en général $f^{-1}(B)$. Cependant nous n'avons pas voulu introduire tout de suite cette notation, pour éviter de confondre avec la fonction réciproque de f qui, elle, n'existe que si f est bijective.

Or dans un repère orthonormé, les points (a, b) et (b, a) sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$ (appelée « première bissectric »). On passe donc de G à H, et de H à G, au moyen de cette symétrie.
Cette propriété est à retenir :

Proposition 2.2.2 *Dans un repère orthonormé, le graphe d'une fonction numérique et celui de sa fonction réciproque (si elle existe) sont symétriques par rapport à la première bissectrice.*

Exercices

1. Dans un repère orthonormé, quelle est l'équation de la droite D', symétrique par rapport à la première bissectrice Δ de la droite D d'équation $y = 5x - 7$?

2. Dessiner l'allure du graphe de la fonction $y = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$, puis celui de sa fonction réciproque.

3. Dessiner l'allure du graphe de $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ et de sa fonction réciproque.

2.3 Sens de variation d'une fonction numérique

Vocabulaire
Soit f une fonction numérique définie sur $X \subset \mathbb{R}$, I une partie de X. On rappelle qu'on dit que f est **croissante sur** I si étant donné deux réels $x, y \in I$, chaque fois que $x < y$ on a $f(x) \leq f(y)$.
Cela se traduit par la formule :

$$(\forall\, x, y \in I) \quad x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y).$$

Si on a la condition plus restrictive que $(\forall\, x, y \in I) \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$, on dit que f est **strictement croissante** sur I.
De même f est **décroissante** sur I si on a

$$(\forall\, x, y \in I) \quad x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$$

et **strictement décroissante** sur I si

$$(\forall\, x, y \in I) \quad x < y \Longrightarrow f(x) > f(y).$$

On dit que f est **monotone** sur I si elle est croissante sur I, ou bien décroissante sur I, **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
On dit que deux fonctions ont **même sens de variation** sur I si elles sont toutes les deux croissantes, ou toutes les deux décroissantes sur I. Enfin on dit qu'elles ont des **sens de variations opposés** si l'une est croissante et l'autre décroissante.

Remarques

1. Si on dit simplement qu'une fonction est croissante, sans préciser sur quel ensemble I, cela signifie qu'elle est croissante sur tout son ensemble de définition. De même pour les autres termes définis ci-dessus.

2. Les notions ci-dessus n'ont pas de sens pour les fonctions à variable complexe ou à valeurs complexes : en effet l'inégalité $z < z'$ n'a de sens que si z et z' sont réels. D'une manière générale pour une fonction d'un ensemble X dans un ensemble Y on ne peut parler de sens de variation (croissance, décroissance etc.) que si on a défini une notion d'ordre sur X et sur Y.

3. Le fait que f soit croissante sur I peut encore se traduire de la façon suivante :

$$(\forall\, x, y \in I) \quad x \neq y \Longrightarrow \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0.$$

4. Dire qu'une fonction n'est pas croissante, cela ne veut pas dire qu'elle est décroissante ! Autrement dit, toutes les fonctions ne sont pas monotones. Cela va sans dire, mais ça va encore mieux en le disant...

Exercices

1. Quelles sont les fonctions qui sont à la fois croissantes et décroissantes ?

2. La fonction $f(x) = x^3$ est-elle croissante sur $\mathbb{R}$? Est-elle strictement croissante ?

3. La fonction $g(x) = 1/x$ est elle monotone sur $\mathbb{R}^*$?

4. La fonction $E(x)$ (partie entière de x) est-elle monotone ? strictement monotone ?

5. Ecrire des formules avec quantificateurs signifiant que
   (a) f n'est pas croissante sur I,
   (b) f est monotone sur I,
   (c) f n'est pas monotone sur I.

Remarquons qu'une fonction strictement monotone est injective. En effet, si par exemple elle est strictement croissante, et si $x \neq x'$ alors

- soit $x < x'$, alors $f(x) < f(x')$,

- soit $x > x'$, alors $f(x) > f(x')$.

Dans les deux cas on a $f(x) \neq f(x')$.
Mais une fonction injective n'est pas forcément monotone : considérer par exemple la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$. Vérifiez que c'est bien une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, mais qu'elle n'est ni croissante ni décroissante sur $\mathbb{R}$.

Composition de fonctions monotones

Proposition 2.3.1 *Soient f et g deux fonctions numériques monotones.*

- *Si f et g ont même sens de variation, alors la composée $f \circ g$ est croissante.*
- *Si f et g ont des sens de variation opposés, alors $f \circ g$ est décroissante.*

On laisse au lecteur la démonstration (très facile) de cette affirmation.

Exercice Rappeler le sens de variation de $f(x) = e^{-x}$ et $g(x) = 1/x$ sur $]0, +\infty[$. Déterminer, sans aucun calcul, le sens de variation de $h(x) = e^{-1/x}$.

3 Exercices

3.1 Soit $f : X \to Y$ une fonction, et soient A et B deux parties de X.
Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ et que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Pour montrer qu'on peut avoir inclusion stricte dans la deuxième formule, considérer $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $f : X \to X$ définie par

$$f(1) = 2,\ f(2) = 3,\ f(3) = 1,\ f(4) = 4,\ f(5) = 3.$$

Trouver des parties A et B de X telles que $A \cap B \neq \emptyset$ et que $f(A \cap B)$ soit strictement inclus dans $f(A) \cap f(B)$.

3.2 Les fonctions suivantes sont-elles injectives :

- f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n + 1$,
- g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt[3]{x} - 1$,
- h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \sqrt{x^2}$.

Déterminer l'image de chacune de ces fonctions.

3.3 Donner le domaine de définition des fonctions numériques suivantes :

$$f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = \ln(1 - 2x^2), \quad h(x) = \frac{x+1}{x^3 - 2x}.$$

3.4 Soit f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Donner son image I. Montrer qu'elle possède une fonction réciproque $g = f^{-1}$ définie sur I, et expliciter $g(x)$.

3.5 Soient les expressions numériques réelles $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{1 - x}$. Donner le domaine de définition de f et de g, et leurs images respectives. Donner le domaine de définition et l'image de $f \circ g$ et de $g \circ f$.

3.6 Soient $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{2 + x}$, $g(x) = 3x - \sqrt{x}$. Donner leur domaine de définition. Ecrire $f + g$ et donner son domaine de définition.

3.7 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ si $|x| \geq 1$, $f(x) = -x$ si $|x| < 1$. Dessiner le graphe de f. Montrer que f est bijective, et décrire la fonction f^{-1}. Calculer $f \circ f$.

3.8 Soit f la restriction de la fonction cos à $[0, 2\pi]$. Tracer le graphe de f, et utilisez-le pour répondre aux questions suivantes :

- Quelle est l'image par f des intervalles suivants :

$$]0, \pi[, \quad]0, 2\pi[, \quad [0, \pi/3], \quad]\pi/3, 4\pi/3].$$

- Déterminer les ensembles suivants :

$$A = \{x \in [0, 2\pi] \mid f(x) \geq 1\},$$

$$B = \{x \in [0, 2\pi] \mid f(x) > 0\},$$

$$C = \{x \in [0, 2\pi] \mid f(x) = 1/2\},$$

$$D = \{x \in [0, 2\pi] \mid f(x) \geq 1/2\}.$$

3.9 Déterminer le sens de variation de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ sur $\mathbb{R}^+$. Déterminer ensuite, sans calculs supplémentaires, le sens de variation de $g(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $\mathbb{R}^-$.

3.10

1. Soient f et g deux fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que $f+g$ et fg sont croissantes.
2. Soient maintenant f et g deux fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les fonctions $f+g$ et fg sont-elles toujours croissantes (prendre par exemple $f(x) = x$, $g(x) = 2x$) ?
3. La somme de deux fonctions monotones est-elle toujours une fonction monotone ? On pourra par exemple examiner le cas de $f(x) = x + \sin x$, $g(x) = -x$.