(*) WWW.SEGBM.NET

Portail des étudiants d'économie

Mathématiques

Ch. 3 : Limites et Dérivées

1 Notion de limites

1.1 Voisinages

- On appellera voisinage d'un réel a tout intervalle ouvert contenant a.
- On appellera voisinage de $+\infty$ tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ (avec $A \in \mathbb{R}$).
- On appellera voisinage de $-\infty$ tout intervalle de la forme $]-\infty; A[$ (avec $A \in \mathbb{R}$).
- On appellera voisinage à droite de a tout intervalle de la forme $]a; \beta[$.
- On appellera voisinage à gauche de a tout intervalle de la forme $]\beta; a[$.

La lettre grecque β désigne ici soit un nombre réel, soit le symbole $+\infty$, soit le symbole $-\infty$.

1.2 Définitions

▷ **Définition 1**

- On dit que f tend vers un réel l quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si *tout* voisinage de l contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x appartient à un certain voisinage de $+\infty$. On écrit alors : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$
- On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si *tout* voisinage de $+\infty$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x appartient à un certain voisinage de $+\infty$. On écrit alors : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- On dit que f tend vers un réel l lorsque x tend vers a si et seulement si *tout* voisinage de l contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x appartient à un certain voisinage de a. On écrit alors : $\lim_{x \to a} f(x) = l$
- On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si et seulement si *tout* voisinage de $+\infty$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x appartient à un certain voisinage de a. On écrit alors : $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$
- On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a *par valeurs supérieures* si et seulement si *tout* voisinage de $+\infty$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x appartient à un certain voisinage à droite de a. On écrit alors : $\lim_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = +\infty$

On définit encore suivant ce même modèle :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$; $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$;
$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}a} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}a} f(x)=l$; $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}a} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}a} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}a} f(x)=l$
Ces définitions sont difficiles « à faire fonctionner ». C'est pourquoi pour calculer une limite, on préfère utiliser les résultats du paragraphe suivant (« Opérations sur les limites ») que l'on démontre, *mais que l'on admettra*, à partir de ces définitions.

1.3 Exemple

Regardons sur un exemple comment on utilise ces définitions. Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{6x+1}{3x-1}$$

Cherchons sa limite en $+\infty$.

1.4 Recherche intuitive :

Lorsque x « prend des très grandes valeurs », 1 est « négligeable » par rapport à $6x$ et $3x$, on peut donc estimer que $f(x)$ « est très proche » de $\frac{6x}{3x}=2$.

1.5 Démonstration du résultat ($\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$) à partir de la définition :

Soit $]\alpha;\beta[$ un voisinage de 2. On va essayer de déterminer x pour que $f(x)\in[2;\beta[$, ce qui prouvera en particulier que $f(x)\in]\alpha;\beta[$. Comme on cherche un voisinage de $+\infty$ pour x, on peut imposer $x>\frac{1}{3}$ de manière à ce que $3x-1>0$, on a alors pour tout $x>\frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned}
f(x)\in]2;\beta[&\iff 2<\frac{6x+1}{3x-1}<\beta\\
&\iff 0<\frac{6x+1}{3x-1}-2<\beta-2\\
&\iff 0<\frac{3}{3x-1}<\beta-2\\
&\iff \frac{3}{3x-1}<\beta-2 \qquad \text{car } 3x-1>0\\
&\iff 3x-1>\frac{3}{\beta-2} \qquad \text{car } 3x-1>0 \text{ et } \beta-2>0\\
&\iff x>\frac{1}{\beta-2}+\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $A=\frac{1}{\beta-2}+\frac{1}{3}$ (qui est positif puisque $\beta-2>0$) pour que :

$$\forall x\in]A;+\infty[\quad f(x)\in]2;\beta[$$

ce qui implique que $f(x)$ appartient au voisinage $]\alpha;\beta[$ de 2 dès que x appartient au voisinage $]\text{A};+\infty[$ de $+\infty$. Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

(*) WWW.SEGBM.NET Portail des étudiants d'économie

1.6 Opération sur les limites

Les limites figurant dans ces tableaux sont celles de deux fonction f et g quand x tend soit vers $+\infty$, soit vers $-\infty$ soit vers un réel a, soit vers a par valeurs supérieures, soit vers a par valeurs inférieures. Tous les résultats seront admis.

1.6.1 Somme :

Si $\lim f$ vaut	Si $\lim g$ vaut	Alors $\lim(f+g)$ vaut
a	a'	$a+a'$
a	$+\infty$	$+\infty$
a	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

1.6.2 Produit :

Si $\lim f$ vaut	Si $\lim f$ vaut	Alors $\lim(fg)$ vaut
a	a'	aa'
$a \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ (règle des signes)
0	$\pm\infty$	Forme indéterminée
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ (règle des signes)

1.6.3 Quotient :

Si $\lim f$ vaut	Si $\lim f$ vaut	Alors $\lim \frac{f}{f}$ vaut
a	$a' \neq 0$	$\frac{a}{a'}$
$a \neq 0$	0	$\pm\infty$ (règle des signes)
0	0	Forme indéterminée
a	$\pm\infty$	0
$\pm\infty$	a	$\pm\infty$ (règle des signes)
$\pm\infty$	$\pm\infty$	Forme indéterminée

1.6.4 Racine carrée :

Si $\lim f$ vaut	Alors $\lim \sqrt{f}$ vaut
$a \geqslant 0$	$\sqrt{a}$
$+\infty$	$+\infty$

1.7 Théorèmes de comparaison

Soit α un symbole désignant :

- soit un nombre réel ;
- soit le symbole $+\infty$;

(*) WWW.SEGBM.NET Portail des étudiants d'économie

- soit le symbole $-\infty$.

On désignera par $\mathcal{V}_\alpha$ un voisinage α (éventuellement un voisinage à droite ou à gauche de α si $\alpha \in \mathbb{R}$).

$\rightsquigarrow$ **Théorème 1** (*admis*)

Soit f et u deux fonctions numériques définies sur un voisinage $\mathcal{V}_\alpha$ de α :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{V}_\alpha \quad f(x) \geqslant u(x) \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \quad \lim_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$$

$\rightsquigarrow$ **Théorème 2** (*admis*)

Soit f et u deux fonctions numériques définies sur un voisinage $\mathcal{V}_\alpha$ de α :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{V}_\alpha \quad f(x) \leqslant u(x) \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \quad \lim_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$$

$\rightsquigarrow$ **Théorème 3** (*Théorème des gendarmes*)

Soit f, u et v trois fonctions numériques définies sur un voisinage $\mathcal{V}_\alpha$ de α :

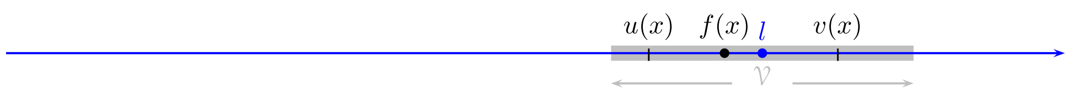
$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{V}_\alpha \quad u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x) \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} v(x) \end{cases} \Longrightarrow \quad \lim_{x \to \alpha} f(x) = \lim_{x \to \alpha} u(x) = \lim_{x \to \alpha} v(x)$$

Démonstration - Faisons la démonstration dans le cas où x tend vers plus l'infini, c'est-à-dire pour $\alpha = +\infty$. Les autres cas ($\alpha = -\infty$ ou $\alpha \in \mathbb{R}$) sont tout à fait similaires.
On a donc : $\mathcal{V}_\alpha =]\mathrm{A}; +\infty[$. Posons $l = \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} v(x)$. Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de l.
Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = l$, il existe un voisinage $]\mathrm{B}; +\infty[$ de $+\infty$ tel que : $\forall x \in]\mathrm{B}; +\infty[\quad u(x) \in \mathcal{V}$.
Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = l$, il existe un voisinage $]\mathrm{C}; +\infty[$ de $+\infty$ tel que : $\forall x \in]\mathrm{C}; +\infty[\quad v(x) \in \mathcal{V}$.
Appelons D le plus grand des trois nombres A, B et C :

$$]\mathrm{A}; +\infty[\cap]\mathrm{B}; +\infty[\cap]\mathrm{C}; +\infty[=]\mathrm{D}; +\infty[$$

On a donc :

$$\forall x \in]\mathrm{D}; +\infty[\quad \begin{cases} u(x) \in \mathcal{V} \\ v(x) \in \mathcal{V} \\ u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x) \end{cases}$$



ce qui implique que :

$$\forall x \in]\mathrm{D}; +\infty[\quad f(x) \in \mathcal{V}$$

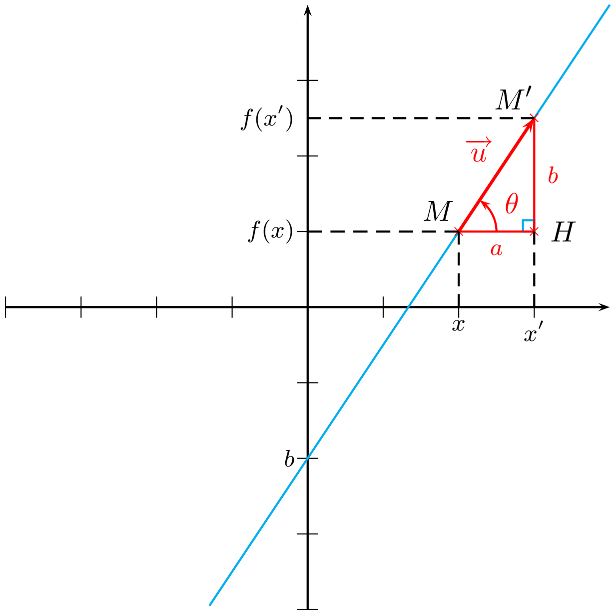
ce qui prouve par définition que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ ■

(*) WWW.SEGBM.NET Portail des étudiants d'économie

2 Dérivées

2.1 Rappel : coefficient directeur d'une droite

Dans tout ce paragraphe, le plan est rapporté à un repère cartésien $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.
Toute droite Δ du plan non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation cartésienne du type : $y = \alpha x + \beta$ où α et β sont des constantes réelles uniques. L'équation d'une droite du type $y = \alpha x + \beta$ est appelée équation réduite de la droite :



- la constante α est appelée le coefficient directeur de la droite Δ ;
- la constante β est appelée ordonnée à l'origine.
- L'ordonnée à l'origine est l'ordonnée du point d'intersection de la droite Δ avec l'axe des ordonnée.
- Le coefficient directeur représente le rapport $\dfrac{b}{a}$ pour tout vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- Si le repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ est orthonormal, le coefficient directeur d'une droite Δ est égal à $\tan\theta$ où θ est l'angle entre $\overrightarrow{\imath}$ et un vecteur directeur de Δ.

2.2 Définition

▷ **Définition 2**

Soit f un fonction définie sur un voisinage de a. On dit que f est dérivable en a si et seulement si $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie (égale à un nombre réel).
On note alors $f'(a) = \displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et on appelle $f'(a)$ le nombre dérivé de f en a.

Exemple : $f : x \longmapsto x^2$ est dérivale en 2.

2.3 Interprétation graphique

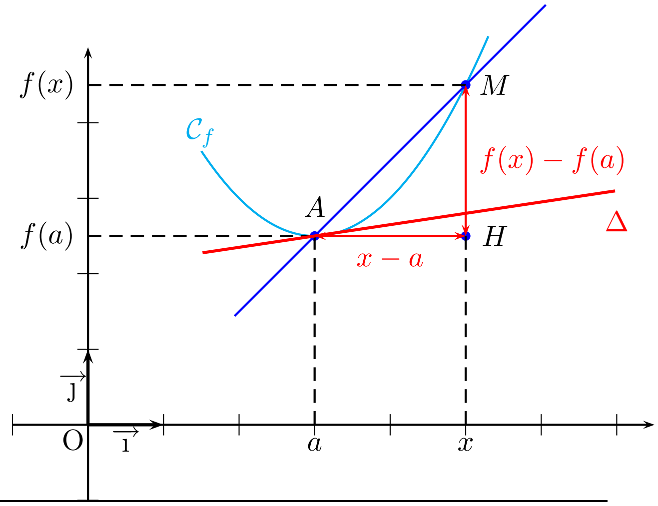
Dans tout ce paragraphe, le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

(*) WWW.SEGBM.NET Portail des étudiants d'économie

▷ **Définition 3**

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f, $A\,(a, f(a))$ un point donné de $\mathcal{C}_f$, $M\,(x, f(x))$ un point parcourant $\mathcal{C}_f$:

- $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le coefficient directeur de la corde (AM).
- $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est par définition le coefficient directeur de la tangente en $A\,(a, f(a))$ à $\mathcal{C}_f$.



⇝ **Théorème 4** (*Equation de la tangente en A*)

Si f est dérivable en a, alors $\mathcal{C}_f$ admet pour tangente en $A\,(a, f(a))$ la droite d'équation :

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

2.4 Dérivée à droite et à gauche

▷ **Définition 4**

Si $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie, alors on dit que f est dérivable à droite en a. On note alors $f'_d(a) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et on appelle $f'_d(a)$ le nombre dérivé à droite de f en a.

Si $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie, alors que f est dérivable à gauche en a. On note alors $f'_g(a) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et on appelle $f'_g(a)$ le nombre dérivé à gauche de f en a.

NB : f dérivable en $a \iff f$ dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Exemple : $f : x \longmapsto |x|$ est dérivale à droite et à gauche en 0 mais n'est pas dérivable en 0. Par contre elle es dérivable en 1.

(*) WWW.SEGBM.NET Portail des étudiants d'économie

2.5 Interprétation numérique

⇝ Théorème 5

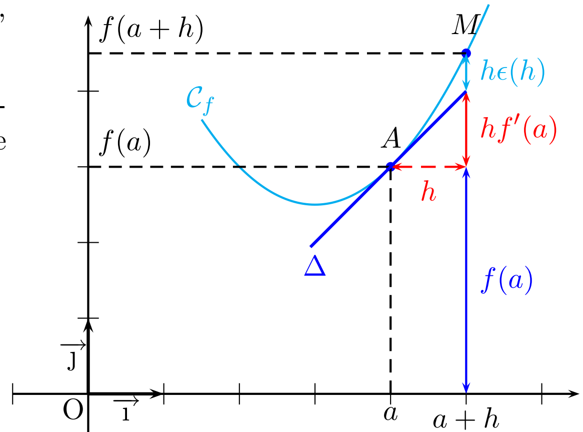
Soit f un fonction définie sur un voisinage de a, dérivable en a.

- Il existe une fonction ϵ définie sur un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a telle que, pour tout h tel que $(a+h) \in \mathcal{V}_a$, on ait :

$$\begin{cases} f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\epsilon(h) \\ \lim\limits_{h\to 0} \epsilon(h) = 0 \end{cases}$$

- (Formule d'approximation)

$$h \approx 0 \quad \Longrightarrow f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$$



Notation différentielle :
En Physique, supposons qu'une quantité y s'exprime en fonction d'une quantité t par la formule $y = f(t)$. Un accroissement de la quantité t est souvent noté Δt, l'accroissement correspondant pour y est noté Δy.
La première formule du théorème précédent peut alors s'écrire pour $t = a$ et $\Delta t = h$:

$$\begin{aligned} f(t+\Delta t) = f(t) + f'(t)\Delta t + \Delta t\epsilon(\Delta t) &\iff f(t+\Delta t) - f(t) = f'(t)\Delta t + \Delta t\epsilon(\Delta t) \\ &\iff \Delta y = f'(t)\Delta t + \Delta t\epsilon(\Delta t) \\ &\iff \frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(t) + \epsilon(\Delta t) \end{aligned}$$

On en déduit que : $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta t} = f'(t)$ puisque $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \epsilon(\Delta t) = 0$.

Les Physiciens notent cette limite $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, considérant lorsque Δt tend vers 0 « qu'à la limite » Δt et Δy « deviennent des quantités infinitésimales » notées $\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}y$ » qu'ils vont « manipuler » comme Δt et Δy. Par exemple, de la formule $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f'(t)$, ils déduisent que $\mathrm{d}y = f'(t)\mathrm{d}t$.

Si t représente le temps et y le distance parcourue par un mobile, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f'(t)$ représente « le rapport entre un accroissement infinitésimale de la distance y et un accroissement infinitésimale du temps t ». C'est ce que les physiciens appellent la vitesse instantanée à l'instant t.

Si on pose $z = f'(t)$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = f''(t)$ représente le rapport entre un accroissement infinitésimale de la vitesse z et un accroissement infinitésimale du temps t ». C'est ce que les physiciens appellent l'accélération instantanée à l'instant t.

(*) WWW.SEGBM.NET Portail des étudiants d'économie

2.6 Fonctions dérivées

2.6.1 Définition

▷ **Définition 5**
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point x de I (éventuellement seulement à droite ou à gauche aux bornes de l'intervalle).
La fonction $x \xmapsto{f'} f'(x)$ est appelée dérivée (ou fonction dérivée) de f sur I.

2.6.2 Tableau des fonctions dérivées usuelles

$x \longmapsto f(x)$	D_f	$D_{f'}$	$x \longmapsto f'(x)$
$x \longmapsto b$ (b constante)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 0$
$x \longmapsto ax$ (a constante)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto a$
$x \longmapsto x^n$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto nx^{n-1}$
$x \longmapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \longmapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto \cos x$
$x \longmapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto -\sin x$

2.6.3 Opérations sur les fonctions dérivées

Soit $u : x \longmapsto u(x)$, $v : x \longmapsto v(x)$, $f : x \longmapsto f(x)$ des fonctions numériques.

Résultats :	**Conditions :**
$(ku)' = ku'$ (k constante)	sur tout intervalle où u est dérivable
$(u+v)' = u' + v'$	sur tout intervalle où u et v sont dérivables
$(uv)' = u'v + uv'$	sur tout intervalle où u et v sont dérivables
$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$	sur tout intervalle où v est dérivable et ne s'annule pas
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	sur tout intervalle où u et v sont dérivables et v ne s'annule pas

2.7 Sens de variation et dérivée

⇝ **Théorème 6** (*admis*)

1. $\forall x \in I \quad f'(x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ est strict$\nearrow$ sur$I$
2. $\forall x \in I \quad f'(x) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ est strict$\searrow$ sur$I$
3. $\forall x \in I \quad f'(x) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ est $\nearrow$ sur$I$
4. $\forall x \in I \quad f'(x) \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ est $\searrow$ sur$I$
5. $\forall x \in I \quad f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ est constante sur$I$

(*) WWW.SEGBM.NET Portail des étudiants d'économie

Attention ! f est strict↗ sur I n'implique pas que : $\forall x \in I \quad f'(x) > 0$. Contre-exemple : Soit $f : x \longmapsto x^3$. f est strict↗ sur $\mathbb{R}$, mais sa dérivée $f' : x \longmapsto 3x^2$ n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle s'annule en 0.

2.8 Dérivée d'une fonction composée

2.8.1 Composée de deux fonctions

▷ **Définition 6**

Soit f et g deux fonctions.
On appelle fonction composée de f par g la fonction notée $g \circ f$ qui à x associe $g[f(x)]$:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & f(x) \arrow[r, mapsto, "g"] & g[f(x)] \end{tikzcd}$$

Remarques :

- Par définition : $g \circ f(x) = g[f(x)]$.
- $g \circ f(x)$ existe $\Longleftrightarrow x \in \mathrm{D}_f$ et $f(x) \in \mathrm{D}_g$.
  Le domaine de définition de $g \circ f$ est donc l'ensemble des réels de D_f tels que $f(x) \in \mathrm{D}_g$: $\mathrm{D}_{g \circ f} = \{x \in \mathrm{D}_f \ / \ f(x) \in \mathrm{D}_g\}$.
- En général : $g \circ f \neq f \circ g$

2.8.2 Théorème

⇝ **Théorème 7**

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Soit g une fonction définie et dérivable sur un intervalle J tel que : $\forall x \in I \quad u(x) \in J$.
Alors $g \circ u$ est dérivable sur I et $(g \circ u)' = (g' \circ u)u'$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in I \quad (g \circ u)'(x) = g'(u(x)) \times u'(x)$$

Démonstration - Admis. Sera démontré en Terminale ■

↘ **Corollaire 1**

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, a et b deux constantes réelles.
Soi J un intervalle tel que $\forall x \in J \quad (ax + b) \in I$, on a :

$$\forall x \in J \quad [f(ax + b)]' = af'(ax + b)$$

Démonstration - C'est une conséquence directe du théorème **??** p. **??** ■

(*) WWW.SEGBM.NET Portail des étudiants d'économie

↘ **Corollaire 2**

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si u est *strictement positive* sur I, alors :

$$\forall x \in I \quad \left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

- Si u *s'annule pas* sur I lorsque l'entier n est négatif, alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in I \quad (u(x)^n)' = nu(x)^{n-1}u'(x)$$

DÉMONSTRATION - C'est une conséquence directe du théorème **??** p. **??** ■

(*) WWW.SEGBM.NET Portail des étudiants d'économie