# Chapitre IV

# Polynômes et fractions rationnelles

# Table des matières

# Chapitre IV

# Polynômes et fractions rationnelles

## Introduction

L'objectif de ce chapitre est de vous entrainer à la pratique des calculs les plus courants sur les polynômes. Cet objectif général se détaille en objectifs plus précis :
- savoir utiliser la notion de degré d'un polynôme ;
- connaître la pratique de la division euclidienne ;
- savoir décomposer en éléments simples un pôlynome dont on connait les racines ;
- savoir décomposer en éléments simples une fraction rationnelle ...

## IV.1 Généralités sur les polynômes

### IV.1.1 Définition d'un polynôme à coefficients réels

**Définition IV.1.1** *Nous appellerons polynôme à coefficients réels toute fonction* $P : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ *de la forme :*

$$x \longrightarrow P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$

*où* $n$ *est un entier naturel, et* $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ *sont des nombres réels donnés appelés coefficients du polynôme. Le nombre* $a_0$ *est appelé le terme constant.*
*L'ensemble des polynômes*[1] *à coefficients réels est noté* $\mathbb{R}[X]$.

**Exemples :**

1. Les coefficients du polynôme $P(x) = x^4 + x$ sont $1, 0, 0, 1, 0$ ;
2. ceux du polynôme $P(x) = 5x$ sont $5, 0$ ;
3. et ceux du polynôme $P(x) = 2(3x+1)(x^2-4) = 6x^3 + 2x^2 - 24x - 8$ sont $6, 2, -24, -8$.

**Théorème IV.1.2** $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.*

### IV.1.2 Degré d'un polynôme

**Définition IV.1.3** *On appelle degré d'un polynôme non nul* $P$*, noté* $deg(P)$*, la plus forte puissance de la variable* $x$ *effectivement présente dans le polynôme.*
*Autrement dit, soit* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$*, si* $a_n \neq 0$ *alors* $deg(P) = n$.
- *Si* $a_n = 1$*, on dit que le polynôme est unitaire.*

[1] On ordonne souvant les polynômes dans l'ordre des puissances décroissantes

- *Si $P(x) = a_n x^n$, on dit que $P(x)$ est un monôme de degré $n$.*
- *L'ensemble des polynômes dont le degré égal à 0 est constitué des polynômes constants.*

**Remarque :** Le polynôme nul $P(x) = 0$ n'a pas de degré.

**Exemples :**

1. Soit le polynôme $P(x) = x^4 + x$, alors $deg(P) = 4$ ;
2. soit le polynôme $P(x) = 5x$, alors $deg(P) = 1$ ;
3. soit le polynôme $P(x) = 2x^2 + 6x^3 - 24x - 8$, alors $deg(P) = 3$ ;
4. soit le polynôme $P(x) = 3$, alors $deg(P) = 0$.

### IV.1.3 Valuation d'un polynôme

**Définition IV.1.4** *On appelle valuation d'un polynôme $P$, noté $val(P)$, la plus petite puissance de la variable $x$ effectivement présente dans le polynôme.*
*Autrement dit, soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_{n_0+1}x^{n_0+1} + a_{n_0}x^{n_0}$, si $a_{n_0} \neq 0$ alors $val(P) = n_0$.*

**Exemples :**

1. Soit le polynôme $P(x) = x^4 + x^2$, alors $val(P) = 2$ ;
2. soit le polynôme $P(x) = 9x^6$, alors $val(P) = deg(P) = 6$ ;
3. soit le polynôme $P(x) = 6x^3 + 2x^2 - 24x - 8$, alors $val(P) = 0$ ;
4. soit le polynôme $P(x) = 3$, alors $val(P) = deg(P) = 0$.

### IV.1.4 Egalité de deux polynômes

Deux polynômes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et si les coefficients de leurs termes de même puissance sont égaux.

### IV.1.5 Opération sur les polynômes

#### a/ Somme de polynômes

**Définition IV.1.5** *Soient $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ et $Q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ deux polynômes à coefficients réels. La somme $P + Q$ est un polynôme défini par :*

$$P(x) + Q(x) = \sum_{i=0}^{s} (a_i + b_i)x^i \qquad \text{où } s \leq \max\{n, m\}.$$

*En général, $deg(P + Q) \leq \max\{deg(P), deg(Q)\}$ et on a égalité si les termes de plus haut degré ne s'éliminent pas.*

**Exemples :**

1. Soient $P(x) = 4x^3 + 3x^2 + 4$ et $Q(x) = -x^2 + 2x + 5$.
   Alors, $P(x) + Q(x) = 4x^3 + 2x^2 + 2x + 9$ et $deg(P + Q) = \max\{deg(P), deg(Q)\}$ ;
2. Soient $P(x) = x^2 + 4$ et $Q(x) = -x^2 + x + 6$.
   Alors, $P(x) + Q(x) = x + 10$ et $deg(P + Q) < \max\{deg(P), deg(Q)\}$.

### b/ Différence de polynômes

**Définition IV.1.6** *Soient* $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *et* $Q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ *deux polynômes à coefficients réels. La différence* $P - Q$ *est un polynôme défini par :*

$$P(x) - Q(x) = \sum_{i=0}^{s} (a_i - b_i)x^i \qquad \text{où } s \leq \max\{n, m\}.$$

*En général,* $deg(P - Q) \leq \max\{deg(P), deg(Q)\}$ *et on a égalité si le terme de plus haut degré ne s'éliminent pas.*

**Exemples :**

1. Soient $P(x) = 4x^3 + 3x^2 + 4$ et $Q(x) = -x^2 + 2x + 5$.
   Alors, $P(x) - Q(x) = 4x^3 + 4x^2 - 2x - 1$ et $deg(P + Q) = \max\{deg(P), deg(Q)\}$ ;
2. Soient $P(x) = x^2 + 6$ et $Q(x) = x^2 + x + 2$.
   Alors, $P(x) - Q(x) = -x + 4$ et $deg(P + Q) < \max\{deg(P), deg(Q)\}$.

### c/ Produit d'un polynôme par un scalaire

**Définition IV.1.7** *Soient le polynôme* $P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}^\star$. *On a* $(\lambda P)$ *est aussi un polynôme défini par :*

$$(\lambda P)(x) = \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i)x^i \qquad \text{et} \qquad deg(\lambda P) = deg(P)$$

**Exemple :** Soit $P(x) = x^5 - 7x^3 + 14$, Alors $(2P)(x) = 2x^5 - 14x^3 + 28$.

### d/ Produit de polynômes

**Définition IV.1.8** *Soient* $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *et* $Q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ *deux polynômes non nuls à coefficients réels et de degrés* $n$ *et* $m$ *respectivement. Le produit* $P.Q$ *est un polynôme non nul de degré* $s = n + m$ *défini par :*

$$P(x).Q(x) = \sum_{k=0}^{s} \left( \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) x^k$$

**Exemple :**
Le produit de $P(x) = x^3 + 3x^2 + 4$ et de $Q(x) = -x^2 + 2x + 5$ est le polynôme de degré 5 défini par :

$$\begin{aligned}(x^3 + 3x^2 + 4) \times (-x^2 + 2x + 5) &= -x^5 + 2x^4 + 5x^3 - 3x^4 + 6x^3 + 15x^2 - 4x^2 + 8x + 20 \\ &= -x^5 - 5x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 8x + 20.\end{aligned}$$

## IV.1.6 Divisibilité dans R[X]

### a/ Division suivant les puissances décroissantes de la variable (division euclidienne)

**Théorème IV.1.9** *Etant donnés un polynôme* $A(x)$ *et un polynôme non nul* $B(x)$, *il existe un couple unique* $(Q(x), R'x))$ *de polynômes tel que :*

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

*avec degré*$(R) <$ *degré*$(B)$*. On dit que l'on a effectué la division euclidienne* [2] *du polynôme* $A(x)$ *par* $B(x)$ *;* $A(x)$ *est le dividende,* $B(x)$ *le diviseur,* $Q(x)$ *le quotient et* $R(x)$ *le reste. Dans le cas où le reste est nul, on dit que* $B(x)$ *divise* $A(x)$ *ou* $A(x)$ *est divisible par* $B(x)$*.*

$$
\begin{array}{cc|c}
\underbrace{A(x)}_{\textit{Dividende}} & & \underbrace{B(x)}_{\textit{Diviseur}} \\
\cline{3-3}
 & \vdots & \underbrace{Q(x)}_{\textit{Quotient}} \\
 & \underbrace{R(x)}_{\textit{Reste}} &
\end{array}
$$

**Exemple :** Divisons le polynôme $A(x)$ par le polynôme $B(x)$ avec :

$$A(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 7x - 2 \qquad \text{et} \qquad B(x) = x^2 + x - 2.$$

Au préalable, on aura ordonné les deux polynômes suivant les puissances décroissantes de $x$. On dispose ensuite les polynômes de la façon suivante :

$$
\begin{array}{ccccccccc|ccccccc}
2x^4 & - & 3x^3 & + & 5x^2 & + & 7x & - & 2 & x^2 & + & x & - & 2 \\
\cline{10-14}
 & & & & & & & & & & & & & 
\end{array}
$$

Divisons le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur. Inscrivons le résultat sous le diviseur (c'est le premier terme du quotient). Multiplions le terme obtenu par le diviseur et soustrayons le résultat du dividende. Recommençons le processus en divisant le premier terme du polynôme résiduel par le premier terme du diviseur. Nous obtenons ainsi le deuxième terme du diviseur. Celui-ci est alors multiplié par le diviseur et le résultat soustrait du polynôme résiduel. On recommence ces étapes jusqu'à ce que le degré du polynôme résiduel soit strictement inférieur au degré du diviseur (le polynôme résiduel est alors le reste de la division). Ce qui donne la division complète :

$$
\begin{array}{cccccccccc|ccccc}
 & 2x^4 & - & 3x^3 & + & 5x^2 & + & 7x & - & 2 & x^2 & + & x & - & 2 \\
\cline{11-15}
- & 2x^4 & - & 2x^3 & + & 4x^2 & & & & & 2x^2 & - & 5x & + & 14 \\
\cline{1-6}
 & & - & 5x^3 & + & 9x^2 & + & 7x & - & 2 & & & & & \\
 & & & 5x^3 & + & 5x^2 & - & 10x & & & & & & & \\
\cline{3-8}
 & & & & & 14x^2 & - & 3x & - & 2 & & & & & \\
 & & & & - & 14x^2 & - & 14x & + & 28 & & & & & \\
\cline{5-10}
 & & & & & & & 17x & + & 26 & & & & & 
\end{array}
$$

Le quotient est donc $Q(x) = 2x^2 - 5x + 14$ et le reste est $R(x) = -17x + 26$. On écrit :

$$2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 7x - 2 = (x^2 + x - 2)(2x^2 - 5x + 14) + (-17x + 26).$$

[2] Les deux polynômes doivent être ordonnés suivant les puissances décroissantes de $x$

### b/ Division suivant les puissances croissantes de la variable

**Théorème IV.1.10** *Etant donnés un polynôme $A(x)$ et un polynôme non nul $B(x)$ tel que $val(B) = 0$. La division suivant les puissances croissantes de la variable $x$ du polynôme $A(x)$ par $B(x)$ à l'ordre $n$ montre qu'il existe un couple de polynômes $(Q(x), R(x))$ tel que :*

$$A(x) = B(x)Q(x) + x^{n+1}R(x)$$

*avec degré$(Q) \leq n$.*

**Exemple :** Divisons suivant les puissances croissantes le polynôme $A(x)$ par le polynôme $B(x)$ à l'ordre $n = 2$ avec :

$$A(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + 5x^4 \qquad \text{et} \qquad B(x) = 1 - x + 2x^2.$$

$$\begin{array}{cccccccccccc|ccccccc}
 & 1 & - & x & + & x^2 & - & x^3 & + & 5x^4 & & & 1 & - & x & + & 2x^2 \\
\cline{13-17}
- & 1 & + & x & - & 2x^2 & & & & & & & 1 & - & x^2 & & \\
\cline{1-6}
 & & & & - & x^2 & - & x^3 & + & 5x^4 & & & & & & & \\
 & & & & & x^2 & - & x^3 & + & 2x^4 & & & & & & & \\
\cline{5-10}
 & & & & & & - & 2x^3 & + & 7x^4 & & & & & & &
\end{array}$$

Ainsi,

$$1 - x + x^2 - x^3 + 5x^4 = (1 - x + 2x^2)(1 - x^2) + x^3(-2 + 7x).$$

D'où $Q(x) = 1 - x^2$ et $R(x) = -2 + 7x$.

### c/ Racines d'un polynôme et caractérisation

#### i/ Définition d'une racine d'un polynôme

**Définition IV.1.11** *On dit que le nombre $a$ est racine (ou zéro) du polynôme $P(x)$ si et seulement si $P(a) = 0$.*

**Exemples :**

- 1 et 2 sont deux racines du polynôme $P(x) = x^3 - 3x + 2$ puisque $P(1) = 0$ et $P(2) = 0$ ;
- 1 est une racine du polynôme $P(x) = x^3 + x - 2$ puisque $P(1) = 0$.

#### ii/ Factorisation d'un polynôme par $(x - a)$

**Définition IV.1.12** *On dit que le polynôme non nul $P(x)$ est factorisable par $(x-a)$ ou encore $P(x)$ est divisible par $(x - a)$ s'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - a)Q(x)$.*

**Théorème IV.1.13** *Le polynôme $P(x)$ admet le nombre $a$ pour racine si et seulement si $P(x)$ est divisible par $(x - a)$.*

**Preuve :** En utilisant la division euclidienne de $P(x)$ par $(x - a)$ on écrit $P(x) = (x - a)Q(x) + R(x)$ avec $deg(R) = 0$, Donc $R(x)$ est un réel et il vaut $P(a)$. ■

**Corollaire IV.1.14** *Si le polynôme $P(x)$ possède $k$ racines distinctes $a_1, a_2, \cdots, a_k$ alors $P(x)$ est divisible par $(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_k)$*

**Preuve :** Si $a_1$ est racine de $P(x)$, on peut écrire $P(x) = (x - a_1)P_1(x)$ ; puisque $a_2 \neq a_1$ est racine de $P(x)$, il est aussi racine de $P_1(x)$, et on a $P_1(x) = (x - a_2)P_2(x)$. D'où, $P(x) = (x - a_1)P_1(x) = (x - a_1)(x - a_2)P_2(x)$. Et on continue le processus. ■

**Corollaire IV.1.15** *Un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ de degré $n$ possède au plus $n$ racines distinctes.*

### d/ Ordre de multiplicité

**Définition IV.1.16** *Le nombre $a$ est racine de multiplicité $m$ du polynôme $P(x)$ si et seulememt si $P(x)$ est divisible par $(x-a)^m$ et non divisible par $(x-a)^{m+1}$.*

**Proposition IV.1.17** *Le nombre $a$ est racine de multiplicité $m$ du polynôme $P(x)$ si et seulememt si il existe un polynôme $Q(x)$ tels que :*

$$P(x) = (x-a)^m Q(x) \quad \text{et} \quad Q(a) \neq 0.$$

**Preuve :** Le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x-a)^m$ signifie qu'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x-a)^m Q(x)$. Supposons que $Q(a) = 0$, alors $Q(x)$ est divisible par $(x-a)$, c'est-à-dire, il existe un polynôme $Q_1(x)$ tel que $Q(x) = (x-a)Q_1(x)$. Et par suite,

$$P(x) = (x-a)^m Q(x) = (x-a)^m (x-a) Q_1(x) = (x-a)^{m+1} Q_1(x).$$

En d'autre terme, $P(x)$ est divisible par $(x-a)^{m+1}$. ■

**Exemple :** Soit le polynôme $P(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$. Alors, le nombe $(-1)$ est racine simple de $P(x)$ et le nombre 1 en est une racine double (c'est-à-dire de multiplicité 2).

### e/ Factorisation des polynômes de R[X]

Il faut savoir décomposer ou factoriser un polynôme en un produit de facteurs pour simplifier les fractions rationnelles et résoudre certaines équations.

### i/ Cas particulier : polynôme du second degré

Une polynôme du second degré à coefficients réels (ou trinôme) s'écrit $P(x) = ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$, et $x$ une variable réelle.

#### Racines d'un polynôme

Pour résoudre l'équation $P(x) = ax^2 + bx + c = 0$, calculons son réalisant (discriminant) : $\triangle = b^2 - 4ac$.

- si $\triangle > 0$, le polynôme admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a}$$

  et on écrit : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_1)$.
- si $\triangle = 0$, le polynôme admet une seule racine (ou deux racines identiques) :

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

  et on écrit : $P(x) = a(x - x_1)^2$.
- si $\triangle < 0$, le polynôme n'admet pas de racine réelle. et on écrit : $P(x) = ax^2 + bx + c$.

#### Propriétés de la somme et du produit des racines d'un polynôme du second degré

Dans le cas où le polynôme est du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes $x_1$ et $x_2$, leur somme est $S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ et leur produit est $P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.

**Théorème IV.1.18** *Les solutions du système*

$$\begin{cases} u + v = S \\ uv = P \end{cases}$$

*sont les couples $(u, v)$ tels que $u$ et $v$ soient les solutions de l'équation du second degré $x^2 - Sx + P = 0$.*

**ii/ Cas général : polynôme de degré $n$**

**Factorisation d'un polynôme de degré $n$**

**Théorème IV.1.19** *Soit $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ un polynôme à coefficients réels de degré $n$. $P(x)$ peut s'écrire de manière unique sous la forme :*

$$P(x) = a_n(x-a_1)^{h_1}(x-a_2)^{h_2}\cdots(x-a_l)^{h_l}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}(x^2+p_2x+q_2)^{k_2}\cdots(x^2+p_mx+q_m)^{k_m}$$

*où $a_1, a_2, \cdots, a_l$ sont les racines réelles de $P(x)$, deux à deux distinctes, de multiplicité $h_1, h_2, \cdots, h_l$ respectivement, et où les trinômes de type $(x^2+px+q)^k$, deux à deux distincts, ont deux racines complexes conjuguées, de multiplicité $k$. On a $h_1+h_2+\cdots+h_l+2(k_1+k_2+\cdots+k_m)=n$.*

Ce théorème signifie que tout polynôme à coefficients réels se factorise en un produit de facteurs du premier degré et de trinômes du second degré à discriminant négatif.

**Exemple :** Soit le polynôme $P(x) = 3x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 6$. On remarque que :

– 2 est racine simple de $P(x)$ puisque $P(2) = 0$. Tout calcul fait, on obtient :

$$P(x) = (x-2)Q(x) \qquad \text{avec} \qquad Q(x) = 3(x^4 + x^3 + x + 1);$$

– $(-1)$ est racine double de $Q(x)$. Tout calcul fait, on obtient :

$$Q(x) = (x+1)^2 Q_1(x) \qquad \text{avec} \qquad Q_1(x) = 3(x^2 - x + 1);$$

– enfin, le discriminant de $Q_1(x)$ est $\triangle = -3 < 0$.

Ainsi, la décomposition de $P(x)$ est comme suit :

$$P(x) = 3(x-2)(x+1)^2(x^2 - x + 1).$$

**Quelques méthodes de factorisation d'un polynôme de degré $n$**

**Méthode des coefficients indéterminés**

Soit le polynôme $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 3x - 2$. Vérifions tout d'abord que 2 est racine de $P(x)$ : en effet, $P(2) = 0$.

On déduit qu'il existe $Q(x)$ tel que $P(x) = (x-2)Q(x)$ avec $deg(P) = 1 + deg(Q)$. Donc, $deg(Q) = 2$. D'où $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

Le problème revient donc à chercher $a$, $b$ et $c$ tel que :

$$3x^3 - 4x^2 - 3x - 2 = (x-2)(ax^2 + bx + c).$$

On développe :

$$(x-2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c.$$

On identifie par la suite les coefficients obtenus avec ceux de $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 3x - 2$ :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 3 \\ b-2a & = & -4 \\ c-2b & = & -3 \\ -2c & = & -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 3 \\ b & = & 2 \\ c & = & 1 \end{array}\right.$$

Ainsi,

$$P(x) = (x-2)(3x^2 + 2x + 1).$$

Selon le Théorème IV.1.19, on peut écrire :

$$P(x) = 3(x-2)(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}).$$

On remarque bien que le discriminant du trinôme $(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3})$ est strictement négatif.

**Méthode de la division euclidienne**

Cette méthode est généralement plus rapide que la précédente.

Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 36$. Vérifions tout d'abord que 3 est racine de $P(x)$ : en effet, $P(3) = 0$.
On déduit qu'il existe $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - 3)Q(x)$. On détermine $Q(x)$ à l'aide de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x - 3)$ :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|rrrrr}
 & 2x^3 & - & 4x^2 & + & 6x & - & 36 & & x & - & 3 & & \\
\cline{10-14}
- & 2x^3 & + & 6x^2 & & & & & & 2x^2 & + & 2x & + & 12 \\
\cline{1-4}
 & & + & 2x^2 & + & 6x & - & 36 & & & & & & \\
 & & - & 2x^2 & + & 6x & & & & & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & & & 12x & - & 36 & & & & & & \\
 & & & & - & 12x & + & 36 & & & & & & \\
\cline{5-8}
 & & & & & & & 0 & & & & & &
\end{array}
$$

Ainsi,

$$P(x) = (x - 3)(2x^2 + 2x + 12).$$

Selon le Théorème IV.1.19, on peut écrire :

$$P(x) = 2(x - 3)(x^2 + x + 6).$$

On remarque bien que le discriminant du trinôme $(x^2 + x + 6)$ est strictement négatif.

## IV.2 Fractions rationnelles dans R[X]

### IV.2.1 Définition des fractions rationnelles

Les fonctions rationnelles sont aux polynômes ce que les fractions sont aux entiers.

**Définition IV.2.1** *La fonction $f(x)$ est une fonction rationnelle si il existe deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ premiers entre eux tel que :*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

*et on a :*

$$deg(f) = deg(P) - deg(Q).$$

*Comme pour toute fraction, le haut (le polynôme $P(x)$) s'appelle le numérateur et le bas (le polynôme $Q(x)$) le dénominateur.*

**Exemples :**

- La fraction rationnelle définie pour tout $x$ par :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^2 - 5x + 5}{x + 3}$$

  a pour degré $1 = 2 - 1$.
- La fraction rationnelle définie pour tout $x$ par :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x}{x + 1}$$

  a pour degré $0 = 1 - 1$.

De la même façon que tous les entiers sont des fractions, tous les polynômes sont des fonctions rationnelles. A l'instar de ce qui se fait pour les fractions, les fonctions rationnelles peuvent être additionnées, multipliées et même divisées. A chaque fois, le résultat est une autre fonction rationnelle. Rappelons qu'on ne peut pas toujours diviser un polynôme par un autre. (Une particularité que l'on retrouve aussi chez les entiers !)

**Exemple :**

$$\frac{2x^2-4x+5}{x^2+1}+\frac{2x}{x+3} \quad = \quad \frac{4x^3+2x^2-5x+15}{x^3+3x^2+x+3}$$

Son degré vaut $0 = 3 - 3$.

**Théorème IV.2.2** *Toute fraction rationnelle s'écrit de faon unique comme somme d'un polynôme (appelé partie entière) et d'éléments simples (appelé partie polaire) dont le type est déterminé par le dénominateur de la fraction rationnelle qu'on décompose.*

### IV.2.2 Partie entière d'une fraction rationnelle

**Théorème IV.2.3** *Soient deux polynômes $P(x)$ de degré $m$ et $Q(x)$ de degré $n$ avec $m \geq n$. Alors, pour tout $x$ tel que $Q(x) \neq 0$, on peut écrire :*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

*où $E(x)$ est le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$ de degré $m-n$, $R(x)$ en est le reste, et $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ est une fraction rationnelle. Le polynôme $E(x)$ est dit partie entière de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.*

**Exemple :**

Soit la fraction rationnelle $\dfrac{5x^4+3x+2}{x^2-2x+1}$. En notant que 1 n'est pas racine du numérateur, on déduit que les polynômes sont premiers entre eux. Pour $x \neq 1$, on a :

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr|rrrrr}
 & 5x^4 & + & 0x^3 & + & 0x^2 & + & 3x & + & 2 & x^2 & - & 2x & + & 1\\ \cline{11-15}
- & 5x^4 & + & 10x^3 & - & 5x^2 & & & & & 5x^2 & + & 10x & + & 15\\ \cline{1-4}
 & & & 10x^3 & - & 5x^2 & + & 3x & + & 2 & & & & & \\
 & & - & 10x^3 & + & 20x^2 & - & 10x & & & & & & & \\ \cline{3-8}
 & & & & & 15x^2 & - & 7x & + & 2 & & & & & \\
 & & & & - & 15x^2 & + & 30x & - & 15 & & & & & \\ \cline{5-10}
 & & & & & & & 23x & - & 13 & & & & &
\end{array}$$

Ainsi,

$$\frac{5x^4+3x+2}{x^2-2x+1} = 5x^2+10x+15+\frac{23x-13}{x^2-2x+1}.$$

### IV.2.3 Partie polaire d'une fraction rationnelle

**Proposition IV.2.4** *Soit $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle et soit $a$ une racine [3] de $Q(x)$ de multiplicité $m$. Ecrivons $Q(x) = (x-a)^m Q_1(x)$ avec $Q_1(a) \neq 0$. Il existe une unique décomposition sous la forme :*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A(x)}{(x-a)^m} + \frac{B(x)}{Q_1(x)},$$

[3]On dit aussi $a$ est un pôle de la fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$ de multiplicité $m$

*avec $A(x)$ et $B(x)$ deux polynômes, $A(x)$ étant tel que $deg(A) < m$. La fraction $\dfrac{A(x)}{(x-a)^m}$ s'appelle la partie polaire de la fraction rationnelle.*