Chapitre III

Relations–Fonctions–Applications

Table des matières

Chapitre III

Relations–Fonctions–Applications

Introduction

L'objectif de ce chapitre est de maîtriser aussi bien les notions de relations (binaires, d'équivalence et d'ordre) que celles d'applications (injectives, surjectives et bijectives) dont il sera fait un usage constant.

III.1 Relations

III.1.1 Relation binaire

a/ Définition d'une relation binaire

On appelle relation binaire [1], noté $\mathcal{R}$ [2] d'un ensemble E vers un ensemble F, une proposition qui est vraie pour certains couples de l'ensemble produit $E \times F$, et fausse pour d'autres. E est appelé ensemble de départ, et F ensemble d'arrivée. Si $E = F$, on dit simplement que $\mathcal{R}$ est une relation binaire définie dans E.

Notation : Pour exprimer que le couple $(x, y) \in E \times F$ vérifie la relation binaire $\mathcal{R}$, on note $x \,\mathcal{R}\, y$. Si $x \,\mathcal{R}\, y$, on dit que y est une image de x par la relation $\mathcal{R}$ et que x est un antécédent de y par cette même relation.

Exemples :

1. Soit $E = F = \mathbb{N}$ et la relation $\mathcal{R}$ définie dans E par :

$$x \,\mathcal{R}\, y \quad \Longleftrightarrow \quad x \text{ divise } y$$

   est une relation binaire dans $\mathbb{N}$. Le couple $(2, 6)$ vérifie la relation donc $2 \,\mathcal{R}\, 6$, tandis que le couple $(3, 4)$ ne vérifie pas la relation.

2. Soit $E = F = \mathbb{R}$ et la relation $\mathcal{C}$ définie dans E par :

$$x \,\mathcal{C}\, y \quad \Longleftrightarrow \quad x \text{ est le carré de } y$$

   est une relation binaire dans $\mathbb{R}$. On a $9 \,\mathcal{C}\, 3$, mais la proposition $7 \,\mathcal{C}\, 2$ est fausse.

[1] dite binaire car elle fait intervenir deux éléments.
[2] Il est fréquent de remplacer la lettre $\mathcal{R}$ par un sumbole spécial.

b/ Graphe d'une relation binaire

Définition III.1.1 *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire de l'ensemble E vers l'ensemble F. On appelle graphe de $\mathcal{R}$ (ou ensemble représentant de $\mathcal{R}$) l'ensemble des couples (x,y) éléments de $E \times F$ vérifiant cette relation. On note $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ et on écrit :*

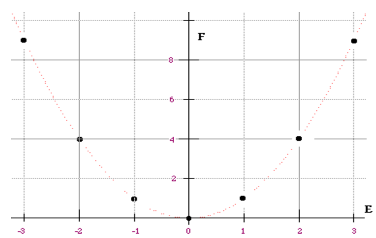
$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}} = \{(x,y) \in E \times F / \quad x\,\mathcal{R}\,y\}.$$

Exemples :

1. Soient $E = \mathbb{Z}$, $F = \mathbb{N}$ et la relation $\mathcal{R}$ définie de E dans F par :

$$x\,\mathcal{R}\,y \quad \Longleftrightarrow \quad y = x^2.$$

   Les couples du $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ sont représentés dans un repère (O, Ox, Oy). On parle de représentation graphique de la relation $\mathcal{R}$.



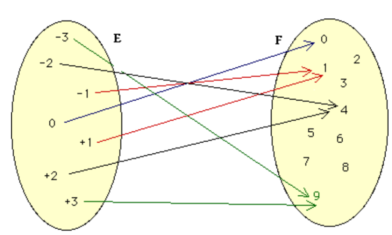
   On remarque que 4 est l'unique image de 2, mais 4 est aussi l'image de (-2). Le nombre 4 admet deux antécédents qui sont (-2) et 2.

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} / \quad y = x^2\}.$$

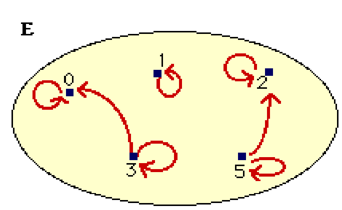
   Si on prend maintenant $E = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ et $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, alors ;

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}} = \{(-3,9),(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4),(3,9)\}.$$

   On peut représenter $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ à l'aide d'un diagramme sagittal [3] :



2. Soit $E = F = \{0,1,2,3,5\}$ et $\mathcal{G}_{\mathcal{R}} = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,0),(3,3),(5,2),(5,5)\}$. La relation binaire $\mathcal{R}$ définie dans E peut être représenter par un diagramme sagittal du type :



[3] du latin : sagitta =flèche

3. Soient $E = \{1, 2\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4\}$. La relation binaire $\mathcal{R}$ définie dans E vers F par :

$$(x, y) \in E \times F, \quad x\,\mathcal{R}\,y \quad \Longleftrightarrow \quad x \text{ divise } y.$$

On a :

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in E \times F / \quad y = kx, \qquad k \in \mathbb{N}\}.$$

Explicitement,

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4)\}.$$

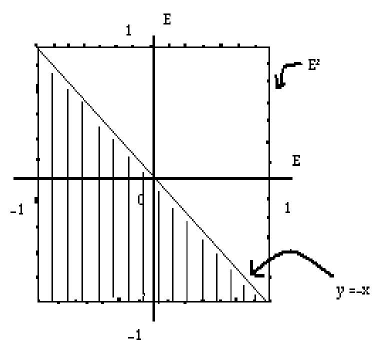
4. Soit $E = F = [-1, 1]$ et la relation binaire $\mathcal{R}$ définie dans E par :

$$(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1], \quad x\,\mathcal{R}\,y \quad \Longleftrightarrow \quad x + y < 0.$$

Alors,

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in E^2 / \quad x + y < 0\}$$

qu'on peut le représenter par la partie hachurée :



III.1.2 Relation d'équivalence

a/ Définition d'une relation d'équivalence

On appelle relation d'équivalence sur un ensemble E, une relation binaire définie dans E et possédant les propriétés suivantes :

1. **Réflexivité :** pour tout $x \in E$, $x\,\mathcal{R}\,x$
2. **Symétrie :** pour tous x, $y \in E$ on a, $(x\,\mathcal{R}\,y \quad \Longrightarrow \quad y\,\mathcal{R}\,x)$
3. **Transitivité :** pour tous x, y et $z \in E$ on a, $[x\,\mathcal{R}\,y \quad \text{et} \quad y\,\mathcal{R}\,z] \quad \Longrightarrow \quad x\,\mathcal{R}\,z$

Notation : Soit $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Au lieu de $x\,\mathcal{R}\,y$ on note $x \sim y\,[\mathcal{R}]$ (lire : x équivalent à y modulo $\mathcal{R}$) ou encore, $x \equiv y\,[\mathcal{R}]$ (lire : x congru à y modulo $\mathcal{R}$).

Exemples :

1. Soient $E = \mathbb{Z}$ et $\mathcal{R}$, la congruence arithmétique modulo p définie dans $\mathbb{Z}$ par :

$$(x, y) \in \mathbb{Z}^2, \qquad x\,\mathcal{R}\,y \quad \Longleftrightarrow \quad x - y = kp, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

où p est un entier naturel donné. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{Z}$ et on note $x \equiv y\,[p]$ au lieu de $x\,\mathcal{R}\,y$. En effet,
– $\mathcal{R}$ est réflexive : soit $x \in \mathbb{Z}$, $\quad x - x = 0 = 0.p$ donc,

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \qquad x\mathcal{R}x.$$

– $\mathcal{R}$ est symétrique : soient $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} x\,\mathcal{R}\,y &\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \qquad x - y = kp \\ &\Longrightarrow \exists k' = -k \in \mathbb{Z}, \qquad y - x = k'p \\ &\Longrightarrow x\,\mathcal{R}\,y \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \qquad (x\,\mathcal{R}\,y \Longrightarrow x\,\mathcal{R}\,y).$$

– $\mathcal{R}$ est transitive : soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x\,\mathcal{R}\,y \\ y\,\mathcal{R}\,z \end{cases} &\Longrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{Z}, \qquad \begin{cases} x - y = kp \\ y - z = k'p \end{cases} \\ &\Longrightarrow \exists k, k' \in \mathbb{Z}, \qquad x - y + y - z = (k + k')p \\ &\Longrightarrow \exists k" = k + k' \in \mathbb{Z}, \qquad x - z = k"p \\ &\Longrightarrow x\,\mathcal{R}\,z \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}, \qquad (x\,\mathcal{R}\,y \text{ et } y\,\mathcal{R}\,z) \Longrightarrow x\,\mathcal{R}\,z.$$

2. Soient $E = \mathbb{N}$ et $\mathcal{R}$, la relation binaire définie dans E par :

$$(x, y) \in E^2, \qquad x\,\mathcal{R}\,y \quad \Longleftrightarrow \quad x \text{ est un multiple de } y.$$

La relation $\mathcal{R}$ est réflexive et transitive mais non symétrique. D'où, la relation n'est pas une relation d'équivalence dans E.

Remarque : Dans un diagramme sagittal d'une relation binaire définie dans E :
- le bouclage de chaque élément montre une relation réflexive,
- la présence systématique d'une flèche retour indique une relation symétrique.

b/ Classe d'équivalence

i)/ Définition d'une classe d'équivalence

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence définie dans un ensemble E.

Définition III.1.2 *On appelle classe d'équivalence d'un élément a de E, l'ensemble de tous les él'ements x de E qui sont en relation avec a.*

On note : $\mathcal{C}l(a)$, $\bar{a}$.
On écrit : $\bar{a} = \{x \in E / \quad x\,\mathcal{R}\,a\}$.

Chaque élément de $\bar{a}$ est appelé représentant de la classe.

Exemples : Reprenons les exemples des relations d'équivalence citées plus haut :

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \{x \in \mathbb{Z} / \quad x - a = kp, \quad k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{a + kp / \quad k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

ii)/ Propriétés

Théorème III.1.3 *Etant donnée une relation d'équivalence dans un ensemble E.*

1. *pour tout $x \in E$, $\quad x \in \bar{x}$;*
2. *pour toux $x, y \in E$, si $y \in \bar{x}$ alors $\bar{x} = \bar{y}$;*
3. *pour toux $x, y \in E$, ou bien $\bar{x} = \bar{y}$ ou bien $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$.*

Preuve :

1. Comme $\mathcal{R}$ est réflexive alors, pour tout $x \in E$, $\; x \mathcal{R} x$. Donc $x \in \bar{x}$;
2. Soient $x, y \in E$. Supposons que $y \in \bar{x}$, c'est-à-dire, $y \mathcal{R} x$ et montrons que $\bar{x} = \bar{y}$.

$$z \in \bar{x} \quad \Longleftrightarrow \quad z \mathcal{R} x \quad \Longleftrightarrow \quad z \mathcal{R} y \quad \Longleftrightarrow \quad z \in \bar{y}$$

(en utilisant la symétrie et la transitivité de $\mathcal{R}$). D'où $\bar{x} = \bar{y}$.

3. Soient $\bar{x}$ et $\bar{y}$ deux classes distinctes. Supposons qu'il existe $z \in E$ tel que $z \in \bar{x} \cap \bar{y}$.

$$\begin{aligned} z \in \bar{x} \cap \bar{y} &\Longrightarrow z \in \bar{x} \quad \text{et} \quad z \in \bar{y} \\ &\Longrightarrow \bar{z} = \bar{x} \quad \text{et} \quad \bar{z} = \bar{y} \quad \text{(d'après (2))} \\ &\Longrightarrow \bar{x} = \bar{y} \end{aligned}$$

ce qui est absurde avec le fait que $\bar{x} \neq \bar{y}$. D'où $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$. ■

Théorème III.1.4 *Les classes d'équivalences relatives à une relation d'équivalence définie dans un ensemble E, forment une partition de E.*

Exemple : Soit la relation de la congruence arithmétique modulo 3, définie dans $\mathbb{Z}$ par :

$$(x, y) \in \mathbb{Z}^2, \qquad x \equiv y \, [3] \quad \Longleftrightarrow \quad x - y = 3k, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

D'après ce qui précède,

$$\bar{a} = \{a + 3k / \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \bar{0} &= \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}, \\ \bar{1} &= \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\}, \\ \bar{2} &= \{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}. \end{aligned}$$

Ces trois classes forment une partition de $\mathbb{Z}$.

c/ Ensemble quotient

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dédinie dans un ensemble E.

Définition III.1.5 *On appelle ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$, noté $E/\mathcal{R}$, l'ensemble de toutes les classes d'équivalences.*

Exemple : Soit la relation de la congruence arithmétique modulo p, définie dans $\mathbb{Z}$ par :

$$(x, y) \in \mathbb{Z}^2, \qquad x \equiv y \, [p] \quad \Longleftrightarrow \quad x - y = kp, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

D'après ce qui précède,

$$\bar{a} = \{a + kp / \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rcl}\bar{0} & = & \{\ldots,-3p,-2p,-p,0,p,2p,3p,\ldots\},\\ \bar{1} & = & \{\ldots,1-3p,1-2p,1-p,1,1+p,1+2p,1+3p,\ldots\},\\ \bar{2} & = & \{\ldots,2-3p,2-2p,1-p,2,2+p,2+2p,2+3p,\ldots\},\\ \vdots & & \\ \overline{p-1} & = & \{\ldots,-p-1,-1,p-1,2p-1,3p-1,\ldots\}.\end{array}$$

Ces p classes forment une partition de $\mathbb{Z}$. Ainsi, l'ensemble quotient noté $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est donné par :

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\ldots,\overline{p-1}\}.$$

III.1.3 Relation d'ordre

a/ Définition d'une relation de préordre

On appelle une relation de préordre dans E toute relation binaire définie dans E qui est à la fois réflexive et transitive.

Exemples :

1. Toutes les relations d'équivalence sont des relations de préordre ;
2. La relation binaire définie dans $\mathbb{Z}$ par :

$$(x,y)\in\mathbb{Z}^2, \qquad x\,/\,y \iff y = kx, \qquad k\in\mathbb{Z}$$

   est un préordre.

b/ Définition d'une relation d'ordre

On appelle une relation d'ordre dans E toute relation de préordre définie dans E qui vérifie la propriété d'antisymétrie, c'est-à-dire : pour tous $x, y \in E$,

$$(x\,\mathcal{R}\,y \quad \text{et} \quad y\,\mathcal{R}\,x) \implies x = y.$$

dans ce cas, E est dit ensemble ordonné par $\mathcal{R}$, et l'on note $(E,\mathcal{R})$ (E ensemble muni de la relation d'ordre $\mathcal{R}$).

Exemples :

1. l'inégalité des nombres réels est une relation d'ordre :

$$(x,y)\in\mathbb{R}^2, \qquad x\,\mathcal{R}\,y \iff x\leq y.$$

2. La relation binaire définie dans $\mathbb{N}$ par :

$$(x,y)\in\mathbb{N}^2, \qquad x\,\mathcal{R}\,y \iff x \text{ divise } y$$

   est une relation d'ordre.

3. La relation binaire définie dans $\mathcal{P}(E)$ par :

$$A,B\in\mathcal{P}(E), \qquad A\,\mathcal{R}\,B \iff A\subseteq B$$

   est une relation d'ordre.

c/ Ordre total ou ordre partiel

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre dans un ensemble E. Deux éléments x et y de E sont comparables si l'on a : ou bien $x\,\mathcal{R}\,y$ ou bien $y\,\mathcal{R}\,x$.

Définition III.1.6 *On dit que :*
- *E est dit totalement ordonné par $\mathcal{R}$ (ou encore $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total dans E) si pour tous x et y de E, x et y sont comparables ;*
- *E est dit partiellement ordonné par $\mathcal{R}$ (ou encore $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel dans E) si il existe au moins x, y de E tels que x et y ne sont pas comparables, c'est-à-dire, ni $x\,\mathcal{R}\,y$ ni $y\,\mathcal{R}\,x$.*

III.2 Fonctions

III.2.1 Définition d'une fonction

Soient E et F deux ensembles distincts ou non. On donne le nom de fonction, f, de E dans F à toute relation binaire $\mathcal{R}$ associant à chaque élément x de E au plus un élément y de F tel que $x\,\mathcal{R}\,y$. On écrit :

$$\begin{array}{cccll} f & : & E & \longmapsto & F \\ & & x & \longrightarrow & y = f(x) \end{array}$$

L'ensemble des fonctions définies de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$.

On appelle E l'ensemble de départ de f, F l'ensemble d'arrivée de f, $y = f(x)$ l'image de x par f, et x l'antécédent de $y = f(x)$.

Si l'ensemble d'arrivée $F = \mathbb{R}$, alors f est dite une fonction numérique.

Exemples :

$$\begin{array}{cccll} f & : & \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \longrightarrow & f(x) = \sqrt{x} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccll} g & : & \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & & x & \longrightarrow & g(x) = |x| \end{array}$$

III.2.2 Domaine de définition d'une fonction

On appelle domaine de définition d'une fonction f, l'ensemble des éléments de E possédant une image dans F. On note,

$$\mathcal{D}_f = \{x \in E \,/ \quad \exists y \in F \text{ tel que } y = f(x)\}.$$

Si $\mathcal{D}_f = E$, on dit que f est partout définie.

Exemple : Soit la fonction numérique f définie pour tout réel x de $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

On $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

III.2.3 Ensemble image d'une fonction

L'image $f(A)$ d'une partie A de E est, par définition, l'ensemble des images des éléments de A,

$$f(A) = \{f(x) / \quad x \in A\}.$$

On appelle ensemble image d'une fonction f, le sous ensemble $f(E)$ de F formé par des éléments de F qui possédent un antécédent dans E. On le note encore Imf et on écrit,

$$Imf = \{y \in F / \quad \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)\}.$$

Exemples :
- $f(x) = \sqrt{x}, \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$ et $Imf = \mathbb{R}_+$;
- $g(x) = |x|, \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $Imf = \mathbb{R}_+$.

III.2.4 Graphe d'une fonction

On appelle graphe d'une fonction f (ou ensemble représentatif de f) la partie de l'ensemble produit $E \times F$, noté $\mathcal{G}_f$ et définie par :

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y) \in E \times F / \quad y = f(x)\}.$$

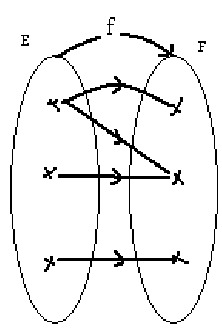
Si le plan est rapporté à deux axes concourantes ; tout couple de deux nombres (x, y) représente un point du plan. x sera l'abscisse de ? et y en sera l'ordonnée. La courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points dont les coordonnées x et y sont liées par la relation $y = f(x)$.

Exemples :
- Pour $f(x) = \sqrt{x}, \quad \mathcal{G}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ / \quad y = \sqrt{x}\}$;
- Pour $g(x) = |x|, \quad \mathcal{G}_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \quad y = |x|\}$.

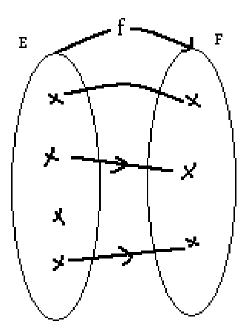
III.3 Applications

III.3.1 Définition d'une application

On appelle f une application définie de E dans F toute correspondance fonctionnelle qui à tout élément x de E associe une et une seule image dans F.



f n'est pas une application



f n'est pas une application

III.3.2 Application identique

L'application de E dans E qui à tout x de E associe x lui même est appelée application identique de E et est notée id_E :

$$\begin{array}{rcccl} id_E & : & E & \longmapsto & E \\ & & x & \longrightarrow & id_E(x) = x \end{array}$$

III.3.3 Restriction et prolongement d'une application

Si f est une application de E dans F, et A une partie de E, on appelle restriction de f à A et on note f_A , l'application de A dans F qui coïncide avec f pour tout élément de A :

$$\begin{array}{rcccl} f_A & : & A & \longmapsto & F \\ & & x & \longrightarrow & f_A(x) = f(x) \end{array}$$

Inversement, considérons $f : A \mapsto F$ et $g : E \mapsto F$ avec $A \subseteq E$. Si, pour tout x de A, on a $g(x) = f(x)$, on dit que g est un prolongement de f à E.

Exemple :

Posons, pour tout x de $\mathbb{Z}$, $f(x) = |x|$. La restriction de f à $\mathbb{N}$ est l'application identique de $\mathbb{N}$: pour tout x de $\mathbb{N}$, $f_{\mathbb{N}}(x) = x$.

III.3.4 Égalité de deux applications

III.3.5 Composition de deux applications

Soient E, F et G trois ensembles distints ou non et f, g deux applications de E dans F et de F dans G respectivement. A un élément x de E, f associe comme image unique dans F l'élément $f(x)$, auquel g associe comme image unique dans G l'élément $g(f(x))$.

$$x \in E \longrightarrow g(f(x)) \in G.$$

On a ainsi une application, appelée produit de f par g (ou encore application composée de f et g), associant à tout élément x de E un élément unique $g(f(x))$ de G. Cette application sera notée par $g \circ f$ et on écrit :

$$\begin{array}{rcccl} g \circ f & : & E & \longmapsto & F \\ & & x & \longrightarrow & g \circ f = g(f(x)) \end{array}$$

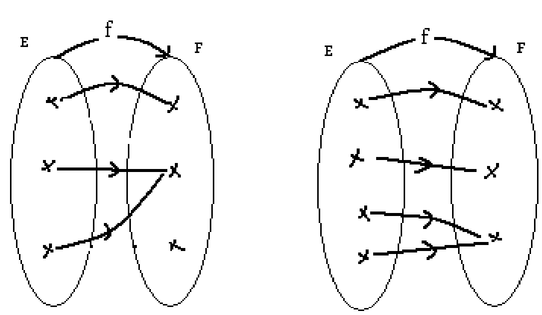
Exemples :

III.3.6 Application surjective, injective, bijective

a/ Surjection

On dit qu'une application f de E dans F est surjective si $f(E) = F$ (normalement $f(E) \subseteq F$), c'est-à-dire :

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E \quad \text{tel que} \quad y = f(x).$$



f est une application non surjective

f est une application surjective

Autrement dit, pour une application surjective de E dans F, il n'y a aucun élément y de F qui ne soit l'image d'un élément x de E.

Exemple : Soit l'application suivante :

$$\begin{array}{cccl} f & : & \mathbb{R}_+ & \longmapsto & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \longrightarrow & f(x) = x^2 \end{array}$$

f est une application surjective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ car tout élément de $\mathbb{R}_+$ est le carré d'un nombre réel positif.

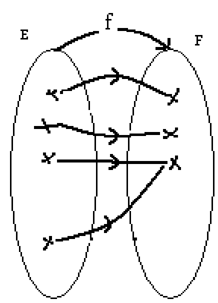
b/ Injection

On dit qu'une application f de E dans F est injective si pour tous $x_1, x_2 \in E$, l'on ait :

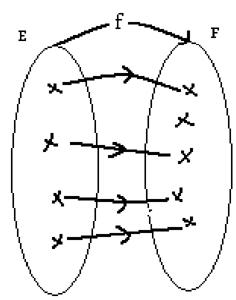
$$x_1 \neq x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1) \neq f(x_2)$$

ou bien (par contraposée)

$$f(x_1) = f(x_2) \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = x_2$$



f est une application non injective



f est une application injective

Autrement dit, pour une application injective de E dans F, il n'arrive jamais que deux éléments distincts de E aient la même image dans F.

Exemple : Soit l'application suivante :

$$\begin{array}{cccl} f & : & \mathbb{R}_+ & \longmapsto & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \longrightarrow & f(x) = x^2 \end{array}$$

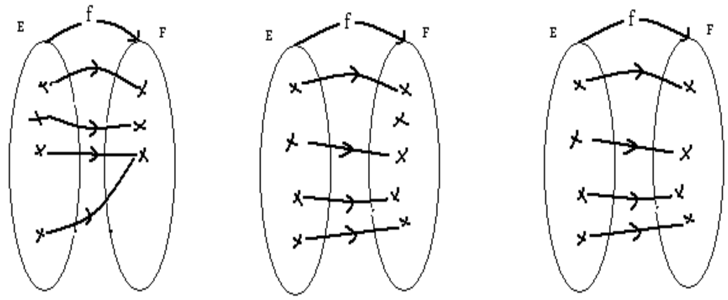
f est une application injective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ car pour toux éléments $x)1, x_2$ de $\mathbb{R}_+$,

$$\begin{array}{rcl} f(x_1) = f(x_2) & \Longrightarrow & x_1^2 = x_2^2 \\ & \Longrightarrow & (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \\ & \Longrightarrow & x_1 = x_2 \end{array}$$

c/ Bijection

On dit qu'une application f de E dans F est bijective si elle est à la fois surjective et injective, c'est-à-dire :

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E \quad \text{tel que} \quad y = f(x).$$



f est surjective et non injective — f est non surjective et injective — f est surjective et injective

Autrement dit, pour une application surjective de E dans F, il n'y a aucun élément y de F qui ne soit l'image d'un et un seul élément x de E.

Exemple : Soit l'application suivante :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}_+ & \longmapsto & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \longrightarrow & f(x) = x^2 \end{array}$$

f est une application bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

Remarque : Toujours bien préciser les ensembles de départ et d'arrivée lorsqu'on parle d'injection, de surjection ou de bijection. En effet :

- $\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & & x & \longrightarrow & f(x) = x^2 \end{array}$ n'est ni surjective ni injective,
- $\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \longrightarrow & f(x) = x^2 \end{array}$ est une surjection et non une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}+$,
- $\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R}_+ & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & & x & \longrightarrow & f(x) = x^2 \end{array}$ est une injection et non une surjection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$,
- $\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R}_+ & \longmapsto & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \longrightarrow & f(x) = x^2 \end{array}$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

III.3.7 Application réciproque d'une bijection

Soit f une application bijective de E dans F. Ainsi f associe à tout x unique de E un y unique de F. Réciproquement, à tout y unique de F une autre application, dite application réciproque, fait correspondre un élément x unique de E. Cette application réciproque s'écrit f^{-1} :

$$\begin{array}{ccccc} f^{-1} & : & F & \longmapsto & E \\ & & y & \longrightarrow & x = f^{-1}(y) \end{array}$$

Remarque : Il est clair que f^{-1} est bijective et que $(f^{-1})^{-1} = f$.

Exemple : Soit l'application bijective :

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R}_+ & \longmapsto & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \longrightarrow & f(x) = x^2 \end{array}$$

Son application réciproque est définie comme suit :

$$\begin{array}{ccccc} f^{-1} & : & \mathbb{R}_+ & \longmapsto & \mathbb{R}_+ \\ & & y = x^2 & \longrightarrow & x = f^{-1}(y) = \sqrt{y} \end{array}$$

Remarque : S'il existe une bijection entre E et F, on dit que E et F sont équipotents. On note : $E \simeq F$. Cette relation est d'équivalence dans l'ensemble des parties de E.